Задачі 352 —357

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

352. Нехай AK, BN — висоти гострокутного трикутника ABC. На сторонах AB, BC обрали точки L, P так, що $NL \perp AB$, $NP \perp BC$, а на сторонах AB, AC — точки Q, M так, що $KQ \perp AB$, $KM \perp AC$. Довести, що $\angle PQK = \angle NLM$.

(І. Нагель, Євпаторія)

353. Нехай x, y, z — такі додатні числа, що $x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{3}{2}$. Довести, що

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2(x + y + z).$$

(В. Ясінський, Вінниця)

354. У паралелограмі $ABCD$ на діагоналі BD обрали довільну точку M. Пряма AM перетинає сторону CD та пряму BC у точках K та N відповідно. Нехай ω_1 — коло з центром у точці M та радіусом MA, а ω_2 — коло, описане навколо трикутника KNC. Позначимо P та Q точки перетину кіл ω_1 та ω_2. Довести, що коло ω_2 вписане у кут QMP.

(І. Нагель, Євпаторія)

355. Дев'ять міст з'єднані дорогами з одностороннім рухом. З кожного міста виходять рівно 3 дороги, по яким можна виїхати у 3 інших міста, та, можливо, декілька доріг входять. Довести, що можна утворити круговий маршрут з дотриманням напрямків доріг, який проходить через щонайбільше 3 міста. *(О. Рибак, Київ)*

356. Послідовність натуральних чисел $a_1, a_2, \ldots$ має властивість

$$\min(a_i, a_j) = a_{\text{НСД}(i,j)}, \quad \max(a_i, a_j) = a_{\text{НСК}(i,j)} \quad \text{для всіх} \quad i, j \geq 1.$$

Знайти найбільшу можливу кількість різних чисел серед $a_1, a_2, \ldots, a_{2009}$.

(В. Брайман, Житомир)

357. Знайдіть найбільше дійсне число λ таке, що при всіх дійсних x виконується нерівність

$$x^{2010} \geq \lambda [x]^{2009} \{x\}.$$

(тут $[x]$ — ціла частина числа x, $\{x\} = x - [x]$ — дробова частина числа x.)

(В. Ясінський, Вінниця)

352. Let AK, BN be the altitudes of acute triangle ABC. Points L, P are chosen at sides AB, BC such that $NL \perp AB$, $NP \perp BC$ and points Q, M are chosen at sides AB, AC such that $KQ \perp AB$, $KM \perp AC$. Prove that $\angle PQK = \angle NLM$.

(I. Nagel, Evpatoria)

353. Let x, y, z be positive numbers such that $x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{3}{2}$. Prove that

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2(x + y + z).$$

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

354. Point M is chosen at the diagonal BD of parallelogram $ABCD$. The straight line AM intersects the side CD and the straight line BC at points K and N respectively. Let ω_1 be the circle with centre M and radius MA and ω_2 be the circumcircle of triangle KNC. Denote by P and Q the intersection points of circles ω_1 and ω_2. Prove that the circle ω_2 is inscribed into the angle QMP.

(I. Nagel, Evpatoria)

355. Nine cities are connected with one-way roads. Each city has exactly 3 outgoing roads which enter into other 3 cities and maybe some ingoing roads. Prove that it is possible to make a circular route which passes through at most 3 cities in accordance with traffic regulations.

(O. Rybak, Kyiv)

356. The sequence of positive integers $a_1, a_2, \ldots$ has the property

$$\min(a_i, a_j) = a_{\gcd(i,j)}, \quad \max(a_i, a_j) = a_{\mathrm{lcm}(i,j)} \quad \text{for every} \quad i, j \geq 1.$$

Find the maximum possible number of distinct integers among $a_1, a_2, \ldots, a_{2009}$.

(V. Brayman, Zhytomyr)

357. Find the largest real λ such that for every real x the inequality

$$x^{2010} \geq \lambda [x]^{2009} \{x\} \quad \text{holds.}$$

(here $[x]$ is the integer part of x, $\{x\} = x - [x]$ is the fractional part of x.)

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)