Задачі 346 —351

Розділ ведуть Володимир Брайман, Галина Крюкова та Володимир Некрашевич

346. Знайти усі натуральні n такі, що

$$\left[\sqrt{n^2-n+\sqrt{n^2-n}}+\sqrt[3]{n^3-n+\sqrt[3]{n^3-n+\sqrt[3]{n^3-n}}}\right]=2009.$$

(тут $[x]$ позначає цілу частину числа x.) *(В. Ясінський, Вінниця)*

347. Квадрати $ABCD$ та $AXYZ$ розташовані всередині кола ω таким чином, що чотирикутник $CDXY$ вписаний у коло ω. Довести, що $AB = AX$ або $AC \perp XY$.

(О. Карлюченко, Київ)

348. Нехай G — точка перетину медіан трикутника ABC. Позначимо r, r_1, r_2 та r_3 радіуси кіл, вписаних у трикутники ABC, GBC, GAC та GAB відповідно та p — півпериметр трикутника ABC. Довести, що

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\geq\frac{3}{r}+\frac{18}{p}.$$

(В. Ясінський, Вінниця)

349. Знайдіть цифру, яка стоїть на 2008-му місці з кінця у десятковому записі числа

$$7^{\overbrace{99\ldots9}^{2009}}.$$

(І. Нагель, Євпаторія)

350. Пряма MN паралельна стороні BC трикутника ABC, причому точка M належить стороні AB, а точка N — стороні AC. Прямі BN та CM перетинаються у точці P. Кола, описані навколо трикутників BMP та CNP, перетинаються у двох різних точках P та Q. Довести, що $\angle BAQ = \angle CAP$.

(Balkan Mathematical Olympiad)

351. У кожній клітинці шахівниці записане одне з чисел 2, 3 або 5. Шаховому королю дозволяється ставати на довільну клітинку дошки і рухатися за шаховими правилами так, щоб не потрапляти на жодну клітинку двічі, причому після кожного ходу король змінює напрям руху. Для кожної такої траєкторії обчислимо добуток чисел, записаних у клітинках, на яких побував король. Довести, що існує траєкторія, для якої цей добуток є четвертим степенем деякого натурального числа.

(О. Кукуш, Київ)

346. Find all positive integers n such that

$$\left[\sqrt{n^2-n+\sqrt{n^2-n}}+\sqrt[3]{n^3-n+\sqrt[3]{n^3-n+\sqrt[3]{n^3-n}}}\right]=2009.$$

(here $[x]$ denotes the integer part of x.) *(V. Yasinskyy, Vinnytsya)*

347. Squares $ABCD$ and $AXYZ$ are located inside the circle ω in such a way that quadrilateral $CDXY$ is inscribed into the circle ω. Prove that $AB = AX$ or $AC \perp XY$.

(O. Karlyuchenko, Kyiv)

348. Let G be the centroid of triangle ABC. Denote by r, r_1, r_2 and r_3 the inradii of triangles ABC, GBC, GAC and GAB respectively and by p the semiperimeter of triangle ABC. Prove that

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\geq\frac{3}{r}+\frac{18}{p}.$$

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

349. Find the 2008-th rightmost digit in decimal representation of the number

$$7^{\overbrace{99\ldots9}^{2009}}.$$

(I. Nagel, Evpatoria)

350. Let MN be a line parallel to the side BC of a triangle ABC, with M on the side AB and N on the side AC. The lines BN and CM meet at point P. The circumcircles of triangles BMP and CNP meet at two distinct points P and Q. Prove that $\angle BAQ = \angle CAP$.

(Balkan Mathematical Olympiad)

351. One of the numbers 2, 3, or 5 is written in each field of a chessboard. The chess King is allowed to occupy any field and move by chess rules in such a way that he never comes to a field twice. Moreover King changes a direction after each move. For any such path, we compute the product of numbers written in the fields which were attained by King. Prove that there exists a path for which this product is the fourth power of a natural number.

(O. Kukush, Kyiv)