Задачі 340 —345

Розділ ведуть Володимир Брайман, Галина Крюкова та Володимир Некрашевич

340. Знайти найменше значення виразу $\left(x-y\right)^2+\left(\sqrt{2-x^2}-\frac{9}{y}\right)^2$ за умови, що $0<x<\sqrt{2}, y>0$. *(В. Ясінський)*

341. Двоє гравців по черзі фарбують клітинки таблиці 2009×2009. Спочатку перший гравець фарбує довільну клітинку, а потім кожен гравець фарбує клітинку, яка знаходиться на відстані щонайбільше 7 клітинок по горизонталі, вертикалі або діагоналі від клітинки, зафарбованої іншим гравцем. Програє той, хто не може зробити черговий хід. Чи має хтось з гравців виграшну стратегію? Якщо має, то хто? *(І. Нагель, Євпаторія)*

342. Для довільних $0\le x\le 1$ та $n\in\mathbb{N}$ довести нерівність $\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)^n-\left(1-x\right)^n\le\frac{x}{2}$. *(Б. Байденко, О. Рибак, Київ)*

343. На сторонах AB, BC та AC трикутника ABC обрали такі точки C_1, A_1 та B_1, що прямі AA_1, BB_1 та CC_1 перетинаються в одній точці. Потім на сторонах сторонах A_1B_1, B_1C_1 та A_1C_1 трикутника $A_1B_1C_1$ обрали такі точки C_2, A_2 та B_2, що прямі A_1A_2, B_1B_2 та C_1C_2 перетинаються в одній точці. Довести, що прямі AA_2, BB_2 та CC_2 перетинаються в одній точці. *(І. Нагель, Євпаторія)*

344. Нехай S — така підмножина натуральних чисел, що

    (1) 2009 належить S;

    (2) якщо n належить S, то $2n+1$ належить S;

    (3) якщо n та nm належать S, то m належить S.

    Довести, що множина S містить усі непарні числа. *(Ю. Шеляженко, Київ)*

345. Нехай I — точка перетину бісектрис трикутника ABC. На сторонах AB, BC, AC трикутника ABC вибрали такі точки P та R, T та K, F та Q відповідно, що $TQ\|AB$, $RF\|BC$ та $PK\|AC$, причому прямі TQ RF та PK перетинаються в точці I. Довести, що $TK+QF+PR\ge KF+PQ+RT$. *(М. Рожкова, Київ)*

340. Find the minimum of $\Big(x-y\Big)^2+\Big(\sqrt{2-x^2}-\frac{9}{y}\Big)^2$, where $0<x<\sqrt{2}, y>0$.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

341. Two players in turn colour the cells of a table of size 2009×2009. At the beginning first player colours any cell. Then each player colours a cell located at the distance of at most 7 cells in horizontal, vertical or diagonal direction from some cell coloured by another player. The player who can't make his turn loses. Has somebody a winning strategy? If somebody has, then who? *(I. Nagel, Evpatoria)*

342. For every $0\le x\le 1$ and $n\in\mathbb{N}$ prove an inequality $\Big(1-x+\frac{x^2}{2}\Big)^n-\Big(1-x\Big)^n\le\frac{x}{2}$.

(B. Baydenko, O. Rybak, Kyiv)

343. Points C_1, A_1 and B_1 are chosen at sides AB, BC and AC of triangle ABC in such a way that the straight lines AA_1, BB_1 and CC_1 are concurrent. Points C_2, A_2 and B_2 are chosen at sides A_1B_1, B_1C_1 and A_1C_1 of triangle $A_1B_1C_1$ in such a way that the straight lines A_1A_2, B_1B_2 and C_1C_2 are concurrent. Prove that the straight lines AA_2, BB_2 and CC_2 are concurrent.

(I. Nagel, Evpatoria)

344. Let S be a subset of positive integers such that

(1) 2009 belongs to S;

(2) if n belongs to S then $2n+1$ belongs to S;

(3) if n and nm belong to S then m belongs to S.

Prove that the set S contains all odd positive numbers. *(Yu. Shelyazhenko, Kyiv)*

345. Let I be the incenter of a triangle ABC. Points P and R, T and K, F and Q are chosen on sides AB, BC, and AC respectively such that $TQ\|AB$, $RF\|BC$, $PK\|AC$ and the lines TQ, RF, and PK are concurrent at the point I. Prove that $TK+QF+PR\ge KF+PQ+RT$. *(M. Rozhkova, Kyiv)*