Задачі 334 —339

Розділ ведуть Володимир Брайман, Галина Крюкова та Володимир Некрашевич

334. Нехай x, y, z — такі попарно різні дійсні числа, що числа

$$k = \frac{1+xy}{x-y}, \quad l = \frac{1+yz}{y-z} \quad \text{та} \quad m = \frac{1+zx}{z-x}$$

є цілими. Довести, що k, l та m є попарно взаємно простими.

(Л. Оридорога, Донецьк)

335. На стороні AC трикутника ABC вибрали таку точку O, що коло ω з центром в точці O дотикається сторони AB у точці K та $BK = BC$. Довести, що висота трикутника, проведена до сторони AC, ділить навпіл відрізок дотичної, проведеної з вершини C до кола ω.

(І. Нагель, Євпаторія)

336. Знайти усі послідовності $\{a_n,\, n \geq 1\}$ натуральних чисел такі, що при усіх натуральних m і n число $\dfrac{n+m^2}{a_n+a_m^2}$ є натуральним.

(В. Ясінський, Вінниця)

337. У класі є $3n$ учнів. Кожні два учні разом зробили подарунок рівно одному з інших учнів. Довести, що при кожному непарному n могло трапитись таке: для будь-яких учнів A, B та C з того, що A та B разом зробили подарунок учню C, випливає, що A та C разом зробили подарунок учню B.

(Baltic Way)

338. У кут A вписали коло ω_1, яке дотикається сторін кута у точках B і C. Пряма AD перетинає ω_1 у точках D і Q, $AD < AQ$. Коло ω_2 з центром у точці A і радіусом AB перетинає AQ у точці I, а деяку пряму, яка проходить через точку D, у точках M і P. Довести, що I — центр кола, вписаного у трикутник MPQ.

(І. Нагель, Євпаторія)

339. У трикутну піраміду $SABC$ вписали кулю, яка дотикається граней SAB, SBC та SAC у точках G, I та O відповідно. Відомо, що G — точка перетину медіан трикутника SAB, I — центр вписаного кола трикутника SBC та O — центр описаного кола трикутника SAC. Довести, що прямі AI, BO та CG перетинаються в одній точці.

(В. Ясінський, Вінниця)

334. Let x, y, z be pairwise distinct real numbers such that

$$k = \frac{1+xy}{x-y}, \quad l = \frac{1+yz}{y-z} \quad \text{and} \quad m = \frac{1+zx}{z-x}$$

are integers. Prove that k, l and m are pairwise relatively prime.

(L. Orydoroga, Donetsk)

335. A point O is chosen at the side AC of triangle ABC so that the circle ω with center O touches the side AB at point K and $BK = BC$. Prove that the altitude that is perpendicular to AC bisects the tangent line from the point C to ω.

(I. Nagel, Evpatoria)

336. Find all sequences $\{a_n,\, n \geq 1\}$ of positive integers such that for every positive integers m and n the number $\dfrac{n+m^2}{a_n + a_m^2}$ is an integer. *(V. Yasinskyy, Vinnytsya)*

337. In a school class with $3n$ pupils, any two of them make a common present to exactly one other pupil. Prove that for all odd n it is possible that the following holds: for any three pupils A, B and C in the class, if A and B make a present to C then A and C make a present to B. *(Baltic Way)*

338. A circle ω_1 touches sides of angle A at points B and C. A straight line AD intersects ω_1 at points D and Q, $AD < AQ$. The circle ω_2 with center A and radius AB intersects AQ at a point I and intersects some line passing through the point D at points M and P. Prove that I is the incenter of triangle MPQ. *(I. Nagel, Evpatoria)*

339. The insphere of triangular pyramid $SABC$ is tangent to the faces SAB, SBC and SAC at points G, I and O respectively. Let G be the intersection point of medians in the triangle SAB, I be the incenter of triangle SBC and O be the circumcenter of triangle SAC. Prove that the straight lines AI, BO and CG are concurrent. *(V. Yasinskyy, Vinnytsya)*