# Задачі 328 —333

*Розділ ведуть Володимир Брайман, Галина Крюкова та Володимир Некрашевич*

328. Нехай $a$ та $b$ — такі раціональні числа, що

$$\frac{2}{2a+b} = \frac{2a}{b} + \frac{b}{2a} - 1 \quad (\text{тут } a \neq 0,\ b \neq 0,\ b \neq -2a).$$

Довести, що $1 - 2ab$ є квадратом раціонального числа.

*(I. Нагель, Євпаторія)*

329. Побудувати трикутник $ABC$, якщо відомі точки $O_A$ і $O_B$, симетричні центру описаного кола $O$ відносно $BC$ і $AC$, та пряма $h_A$, якій належить висота, проведена до сторони $BC$.

*(Г. Філіпповський, Київ)*

330. Точка $O$ — середина сторони $AB$ трикутника $ABC$. На сторонах $AC$ та $BC$ вибрали точки $M$ та $K$ відповідно так, що $\angle MOK = 90°$. Знайти кут $ACB$, якщо $AM^2 + BK^2 = CM^2 + CK^2$.

*(I. Федак, Івано-Франківськ)*

331. Чи існують натуральні числа $a$ і $b$ такі, що

а) $4a^3 - 53a - 1 = 10^{2b}$; б) $4a^3 - 53a - 1 = 10^{2b-1}$?

*(О. Макарчук, Кіровоград)*

332. Функція $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ задовольняє нерівність $f(3x) \geq f\left(\frac{1}{2}f(2x)\right) + 2x$ при усіх $x > 0$. Довести, що $f(x) \geq x$ при усіх $x > 0$.

*(В. Ясінський, Вінниця)*

333. Нехай коло $\omega$ дотикається сторін кута $\angle A$ в точках $B$ та $C$, $B'$ та $C'$ — середини $AB$ та $AC$ відповідно. На прямій $B'C'$ вибрали точки $M$ та $Q$, а на більшій дузі $BC$ кола $\omega$ — точку $K$. Відрізки $KM$ та $KQ$ перетинають $\omega$ у точках $L$ та $P$. Знайти $\angle MAQ$, якщо точка перетину відрізків $MP$ та $LQ$ належить колу $\omega$.

*(I. Нагель, Євпаторія)*

328. Let $a$ and $b$ be rational numbers such that

$$\frac{2}{2a+b} = \frac{2a}{b} + \frac{b}{2a} - 1 \quad \text{(here } a \neq 0,\ b \neq 0,\ b \neq -2a).$$

Prove that $1 - 2ab$ is a square of rational number.

*(I. Nagel, Evpatoria)*

329. Construct triangle $ABC$ given points $O_A$ and $O_B$, which are symmetric to its circumcenter $O$ with respect to $BC$ and $AC$, and the straight line $h_A$, which contains its altitude to $BC$.

*(G. Filippovskyy, Kyiv)*

330. Let $O$ be the midpoint of the side $AB$ of triangle $ABC$. Points $M$ and $K$ are chosen at sides $AC$ and $BC$ respectively such that $\angle MOK = 90°$. Find angle $ACB$, if $AM^2 + BK^2 = CM^2 + CK^2$.

*(I. Fedak, Ivano-Frankivsk)*

331. Do there exist positive integers $a$ and $b$ such that

a) $4a^3 - 53a - 1 = 10^{2b}$; b) $4a^3 - 53a - 1 = 10^{2b-1}$?

*(O. Makarchuk, Kirovograd)*

332. Function $f : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ satisfies the inequality $f(3x) \geq f\left(\frac{1}{2}f(2x)\right) + 2x$ for every $x > 0$. Prove that $f(x) \geq x$ for every $x > 0$.

*(V. Yasinskyy, Vinnytsya)*

333. Let circle $\omega$ touches the sides of angle $\angle A$ at points $B$ and $C$, $B'$ and $C'$ are the midpoints of $AB$ and $AC$ respectively. Points $M$ and $Q$ are chosen at the straight line $B'C'$ and point $K$ is chosen at bigger ark $BC$ of the circle $\omega$. Line segments $KM$ and $KQ$ intersect $\omega$ at points $L$ and $P$. Find $\angle MAQ$, if the intersection point of line segments $MP$ and $LQ$ belongs to circle $\omega$.

*(I. Nagel, Evpatoria)*