Задачі 322 —327

Розділ ведуть Володимир Брайман, Галина Крюкова та Володимир Некрашевич

322. Знайти найменше можливе відношення п'ятицифрового числа до суми його цифр.

(Ю. Рабінович, Київ)

323. Нехай AA_1 і CC_1 — бісектриси трикутника ABC ($A_1 \in BC$, $C_1 \in AB$). Пряма A_1C_1 перетинає промінь AC у точці D. Довести, що кут ABD тупий.

(І. Нагель, Євпаторія)

324. Нехай H — точка перетину висот гострокутного трикутника ABC. Коло ω з діаметром AH та коло, описане навколо трикутника BHC, перетинаються в точці $P \neq H$. Довести, що пряма AP проходить через середину BC.

(Ю. Білецький, Київ)

325. Розв'язати нерівність

$$\begin{aligned}&|x-1|+3|x-3|+5|x-5|+\ldots+2009|x-2009| \geq \\ &\geq 2|x-2|+4|x-4|+6|x-6|+\ldots+2008|x-2008|.\end{aligned}$$

(О. Кукуш, Київ)

326. Нехай P — довільна точка всередині трикутника ABC, ω_A, ω_B і ω_C — кола, описані навколо трикутників BPC, APC і APB відповідно. Позначимо X, Y, Z точки перетину прямих AP, BP, CP з колами ω_A, ω_B, ω_C відповідно ($X, Y, Z \neq P$). Довести, що

$$\frac{AP}{AX}+\frac{BP}{BY}+\frac{CP}{CZ}=1.$$

(О. Манзюк, Київ)

327. Деякі міста країни з'єднано авіарейсами в обох напрямках. Відомо, що з будь-якого міста можливо потрапити у будь-яке інше (можливо, з пересадками) та з кожного міста виходить рівно 100 рейсів. За поганих погодних умов m рейсів було закрито. Для якого найбільшого m при цьому все рівно можна буде здійснити переліт (можливо, з пересадками) між будь-якими двома містами?

(А. Примак, Київ)

322. Find the minimum possible ratio of 5-digit number to the sum of its digits.

(Yu. Rabinovych, Kyiv)

323. Let AA_1 and CC_1 be angle bisectors of triangle ABC ($A_1 \in BC$, $C_1 \in AB$). Straight line A_1C_1 intersects ray AC at point D. Prove that angle ABD is obtuse.

(I. Nagel, Evpatoria)

324. Let H be the orthocenter of acute-angled triangle ABC. Circle ω with diameter AH and circumcircle of triangle BHC intersect at point $P \neq H$. Prove that the straight line AP pass through the midpoint of BC.

(Yu. Biletskyy, Kyiv)

325. Solve the inequality

$$|x-1| + 3|x-3| + 5|x-5| + \ldots + 2009|x-2009| \geq$$
$$\geq 2|x-2| + 4|x-4| + 6|x-6| + \ldots + 2008|x-2008|.$$

(O. Kukush, Kyiv)

326. Let P be arbitrary point inside the triangle ABC, ω_A, ω_B and ω_C be the circumcircles of triangles BPC, APC and APB respectively. Denote by X, Y, Z the intersection points of straight lines AP, BP, CP with circles ω_A, ω_B, ω_C respectively ($X, Y, Z \neq P$). Prove that

$$\frac{AP}{AX} + \frac{BP}{BY} + \frac{CP}{CZ} = 1.$$

(O. Manzjuk, Kyiv)

327. Some cities of the country are connected by air flights in both directions. It is known that it is possible to reach every city from any another (probably, with changes) and there are exactly 100 flights from each city. Some m flights have been canceled because of bad weather conditions. For which maximum m it is still possible to travel between each two cities (probably, with changes)?

(A. Prymak, Kyiv)