Задачі 316 —321

Розділ ведуть Володимир Брайман, Галина Крюкова та Володимир Некрашевич

316. Нехай зафіксовані числа $S > 0$ та $n \geq 3$. Знайти найменше можливе значення виразу
$$\frac{a_1(1+a_2a_3)+a_2(1+a_3a_4)+\ldots+a_n(1+a_1a_2)}{(\sqrt[3]{a_1a_2a_3}+\sqrt[3]{a_2a_3a_4}+\ldots+\sqrt[3]{a_na_1a_2})^3},$$
де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — довільні додатні числа такі, що $a_1+a_2+\ldots+a_n = S$.

(Д. Мітін, Київ)

317. Нехай AB — діаметр кола ω. На колі ω вибрали такі точки M, C та K, що дотична до кола ω в точці M та січна CK перетинаються в точці Q, причому точки A, B, Q лежать на одній прямій. Нехай D — проекція точки M на AB. Довести, що DM є бісектрисою кута CDK. *(І. Нагель, Євпаторія)*

318. У просторі відмітили 10 різних точок $T_1, T_2, \ldots, T_{10}$ і деякі з них з'єднали відрізками, що не перетинаються. Жук знаходиться у точці T_1 і може переповзти по відрізках у точку T_{10}. Довести, що виконується принаймні одна з умов:

(i) існує маршрут жука з T_1 у T_{10}, який проходить через щонайбільше дві точки, відмінні від T_1 та T_{10};
(ii) існують такі точки T_i та T_j $(2 \leq i < j \leq 10)$, що будь-який маршрут жука з T_1 у T_{10} проходить через точку T_i або через точку T_j.

(В. Ясінський, Вінниця)

319. Кола ω_1 та ω_2 перетинаються у точках A та B. Діаметр BP кола ω_2 перетинає коло ω_1 у точці C, а діаметр BK кола ω_1 перетинає коло ω_2 у точці D. Пряма CD перетинає коло ω_1 у точці $S \neq C$ та коло ω_2 у точці $T \neq D$. Довести, що $BS = BT$.

(І. Федак, Івано-Франківськ)

320. Нехай k — натуральне число. Довести, що існують такі многочлени $P_0(n)$, $P_1(n)$, $\ldots$, $P_{k-1}(n)$ (їх коефіцієнти, можливо, залежать від k), що для усіх натуральних n виконується рівність
$$\left[\frac{n}{k}\right]^k = P_0(n) + P_1(n)\left[\frac{n}{k}\right] + \ldots + P_{k-1}(n)\left[\frac{n}{k}\right]^{k-1}.$$
($[a]$ означає найбільше ціле число, яке не перевищує a).

(William Lowell Putnam Math. Competition)

321. Нехай ω_1 — описане коло трикутника $A_1A_2A_3$, W_1, W_2, W_3 — середини дуг A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 та K_1, K_2, K_3 — точки дотику вписаного у трикутник $A_1A_2A_3$ кола ω_2 зі сторонами A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 відповідно. Довести, що
$$W_1K_1 + W_2K_2 + W_3K_3 \geq 2R - r,$$
де R, r — радіуси кіл ω_1 та ω_2. *(А. Примак, Київ)*

316. Let $S > 0$ and $n \geq 3$ be fixed. Find the minimum value of the expression

$$\frac{a_1(1+a_2a_3)+a_2(1+a_3a_4)+\ldots+a_n(1+a_1a_2)}{(\sqrt[3]{a_1a_2a_3}+\sqrt[3]{a_2a_3a_4}+\ldots+\sqrt[3]{a_na_1a_2})^3},$$

where $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are arbitrary positive numbers such that $a_1+a_2+\ldots+a_n = S$.

(D. Mitin, Kyiv)

317. Let AB be a diameter of circle ω. Points M, C and K are chosen at circle ω in such a way that the tangent line to the circle ω at point M and the secant line CK intersect at point Q and points A, B, Q are collinear. Let D be the projection of point M to AB. Prove that DM is the angle bisector of angle CDK.

(I. Nagel, Evpatoria)

318. Ten pairwise distinct points $T_1, T_2, \ldots, T_{10}$ are chosen in the space and some of them are connected by segments without intersections. A beetle sitting at the point T_1 can move along the segments to the point T_{10}. Prove that at least one of the following statements is true:

(i) there exist a route of the beetle from T_1 to T_{10} which pass through at most two points distinct from T_1 and T_{10};
(ii) there exist points T_i and T_j $(2 \leq i < j \leq 10)$ such that any route of the beetle from T_1 to T_{10} pass through the point T_i or through the point T_j.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

319. Circles ω_1 and ω_2 intersect at points A and B. Diameter BP of ω_2 intersects the circle ω_1 at point C and diameter BK of the circle ω_1 intersects the circle ω_2 at point D. The straight line CD intersects the circle ω_1 at point $S \neq C$ and the circle ω_2 at point $T \neq D$. Prove that $BS = BT$.

(I. Fedak, Ivano-Frankivsk)

320. Let k be a positive integer. Prove that there exist polynomials $P_0(n), P_1(n), \ldots,$ $P_{k-1}(n)$ (which may depend on k) such that for any integer n,

$$\left[\tfrac{n}{k}\right]^k = P_0(n) + P_1(n)\left[\tfrac{n}{k}\right] + \ldots + P_{k-1}(n)\left[\tfrac{n}{k}\right]^{k-1}.$$

($[a]$ means the largest integer $\leq a$.)

(William Lowell Putnam Math. Competition)

321. Let ω_1 be the circumcircle of triangle $A_1A_2A_3$, let W_1, W_2, W_3 be the midpoints of arcs A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 and let the incircle ω_2 of triangle $A_1A_2A_3$ touches the sides A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 at points K_1, K_2, K_3 respectively. Prove that

$$W_1K_1 + W_2K_2 + W_3K_3 \geq 2R - r,$$

where R, r are the radii of ω_1 and ω_2.

(A. Prymak, Kyiv)