Задачі 310 —315

Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горовий та Володимир Некрашевич

310. У опуклому n-кутнику відмітили середини усіх діагоналей. Їх виявилось 12. Якою може бути мінімальна кількість сторін цього n-кутника?

(І. Нагель, Євпаторія)

311. На сторонах трикутника ABC зовні побудували квадрати BCC_1B_2, CAA_1C_2, ABB_1A_2, а O_A, O_B, O_C — центри цих квадратів. Нехай A_0, B_0, C_0 — точки перетину прямих A_1B_2 і C_1A_2, A_1B_2 і B_1C_2, C_1A_2 і C_1A_2 відповідно. Довести, що прямі O_AA_0, O_BB_0 і O_CC_0 перетинаються в одній точці.

(В. Ясинський, Вінниця)

312. У трикутнику ABC вписане коло з центром I дотикається сторін AB та BC відповідно у точках K та P. Бісектриса кута C перетинає відрізок KP у точці Q, а пряма AQ перетинає сторону BC у точці N. Довести, що точки A, I, N та B лежать на одному колі.

(І. Нагель, Євпаторія)

313. Пряма l перетинає сторону трикутника у точці X та прямі AC, AB у точках M, K відповідно. На прямій l вибрали точку N таким чином, що AN є дотичною до кола, описаного навколо трикутника ABC. Нехай L — відмінна від A точка перетину кіл, описаних навколо трикутників ABC і ANX. Довести, що точки A, M, L, K лежать на одному колі.

(А. Примак, О. Манзюк, Київ)

314. Розвязати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{y}} + \frac{3}{\sqrt{z}} = 1, \\ \sqrt{y} - \frac{3}{\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2, \\ \sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{y}} = 3. \end{cases}$$

(І. Федак, Івано-Франківсьък)

315. Нехай $A_1, \ldots, A_n$ — такі відрізки на прямій, що
1) $A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$ при усіх $1 \leq i \leq n-1$;
2) при $1 \leq i < j \leq n$ якщо $i - j$ парне, то $A_i \cap A_j \neq \varnothing$.
Знайти найбільше $k = k(n)$ таке, що існує точка, яка належить щонайменше k відрізкам.

(А. Примак, Київ)

310. The midpoints of all diagonals of convex n-gon are marked. There are 12 marked points. Find the minimal possible number of sides of this n-gon.

(I. Nagel, Evpatoria)

311. Squares BCC_1B_2, CAA_1C_2, ABB_1A_2 are constructed from the outside at sides of triangle ABC and O_A, O_B, O_C are the centres of these squares. Let A_0, B_0, C_0 be the intersection points of the straight lines A_1B_2 and C_1A_2, A_1B_2 and B_1C_2, C_1A_2 and C_1A_2 respectively. Prove that the straight lines O_AA_0, O_BB_0 and O_CC_0 are concurrent.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

312. The incircle of triangle ABC with center I touches the sides AB and BC at points K and P respectively. The bissector of angle C intersects the segment KP at point Q and the straight line AQ intersects the side BC at point N. Prove that points A, I, N and B lie at a common circle.

(I. Nagel, Evpatoria)

313. The straight line l intersects the side BC of triangle ABC at point X and the straight lines AC, AB at points M, K respectively. Point N is chosen at the straight line l in such way that AN touches the circumcircle of triangle ABC. Let L be the intersection point of the circumcircles of triangles ABC and ANX, $L \neq A$. Prove that points A, M, L, K lie at a common circle.

(A. Prymak, O. Manzjuk, Kyiv)

314. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{y}} + \frac{3}{\sqrt{z}} = 1, \\ \sqrt{y} - \frac{3}{\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2, \\ \sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{y}} = 3. \end{cases}$$

(I. Fedak, Ivano-Frankivsk)

315. Let $A_1, \ldots, A_n$ be segments at a straight line such that
1) $A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$ for each $1 \leq i \leq n-1$;
2) for every $1 \leq i < j \leq n$ if $i - j$ is even then $A_i \cap A_j \neq \varnothing$.
Find the maximal $k = k(n)$ such that there exists point which belongs to at least k segments.

(A. Prymak, Kyiv)