Задачі 304 —309

Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горовий та Володимир Некрашевич

304. Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC. На стороні AB обрали точку D таку, що $BD = BC$ та $DC = DA$. Нехай $DM \perp AI$, $M \in AI$. Довести, що $AM = MI + IC$.

(І. Нагель, Євпаторія)

305. Знайти всі пари натуральних чисел (m, n) такі, що

$$7(m^5 - n^5) = 41m^2n^2 + 1.$$

(В. Ясинський, Вінниця)

306. Нехай $ABCD$ — паралелограм, P — проекція точки A на BD, Q — проекція точки B на AC, M та N — ортоцентри трикутників PCD та QCD відповідно. Довести, що $PQNM$ — паралелограм.

(А. Примак, Київ)

307. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} \quad f\big((x+z)(y+z)\big) = \big(f(x) + f(z)\big)\big(f(y) + f(z)\big).$$

(Г. Шевченко, Київ)

308. Всередині трикутника ABC вибрали довільну точку M. Прямі AM, BM та CM перетинають сторони трикутника в точках A_1, B_1 та C_1 відповідно. Нехай K — проекція B_1 на A_1C_1. Довести, що KB_1 — бісектриса кута AKC.

(І. Нагель, Євпаторія)

309. На дошці записані числа 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ та $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Дозволяється збільшувати або зменшувати довільне число на різницю двох довільних інших чисел, помножену на будь-яке раціональне число. Чи можна за декілька таких операцій отримати на дошці числа 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ та $2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$?

(А. Примак, Київ)

304. Let I be the incenter of triangle ABC. Point D on the side AB is such that $BD = BC$ and $DC = DA$. Let $DM \perp AI$, $M \in AI$. Prove that $AM = MI + IC$.

(I. Nagel, Evpatoria)

305. Find all pairs of positive integers (m, n) such that

$$7(m^5 - n^5) = 41m^2n^2 + 1.$$

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

306. Let $ABCD$ be a parallelogram, P be the projection of A to BD, Q be the projection of B to AC, M and N be the orthocenters of triangles PCD and QCD respectively. Prove that $PQNM$ is a parallelogram.

(A. Prymak, Kyiv)

307. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} \quad f\big((x+z)(y+z)\big) = \big(f(x) + f(z)\big)\big(f(y) + f(z)\big).$$

(G. Shevchenko, Kyiv)

308. Point M is chosen inside the triangle ABC. The straight lines AM, BM and CM intersect sides of the triangle at points A_1, B_1 and C_1 respectively. Let K be the projection of B_1 to A_1C_1. Prove that KB_1 is a bisector of angle AKC.

(I. Nagel, Evpatoria)

309. The numbers 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ and $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ are written at the blackboard. It is allowed to increase or to decrease any number by the difference of any other two numbers multiplied by any rational number. Is it possible to obtain numbers 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ and $2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$ at the blackboard after several such operations?

(A. Prymak, Kyiv)