# Задачі 298 —303

*Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горовий та Володимир Некрашевич*

298. Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник, $M$ — точка перетину медіан трикутника $ABC$, $N$ — така точка відрізку $MD$, що $MN : ND = 1 : 3$. На прямих $AN$ та $CN$ вибрали точки $E$ та $F$ відповідно так, що $ME \parallel AD$ та $MF \parallel CD$. Довести, що прямі $AF$, $CE$ та $BD$ перетинаються в одній точці.

*(Т. Лазоренко, Київ)*

299. Нехай $ABCD$ — такий опуклий чотирикутник, що $AB = BC = CD$ та $AC \neq BD$, а $E$ — точка перетину діагоналей $ABCD$. Довести, що $AE = DE$ тоді та лише тоді, коли $\angle BAD + \angle ADC = 120°$.

*(Balkan Mathematical Olympiad)*

300. Є набір каменів вагою $1, 2, \ldots, n$ грамів ($n \in \mathbb{N}$). Знайти всі $n$ та $k$, при яких можливо покласти $k$ та $n-k$ каменів з набору відповідно на дві шальки терезів так, щоб отримати рівновагу.

*(О. Руденко, Київ)*

301. Нехай $a, b, c$ — такі додатні числа, що $abc \geq 1$. Довести, що

$$\frac{a+1}{a^2+a+1} + \frac{b+1}{b^2+b+1} + \frac{c+1}{c^2+c+1} \leq 2.$$

*(Б. Павлик, Д. Мітін, Київ)*

302. Вершини 2007-кутника пофарбовано послідовно в білий, чорний та червоний колір. В одній з червоних вершин стоїть фішка. Двоє гравців по черзі виконують дві операції: пересувають фішку у іншу вершину по стороні 2007-кутника та потім витирають деяку сторону. Гра завершується, коли не можна пересунути фішку. Якщо в кінці гри фішка стоїть у білій вершині, то виграє перший гравець, якщо у чорній, то другий, а якщо у червоній, то оголошується нічия. Чи має хтось з гравців виграшну стратегію? Якщо має, то хто?

*(В. Брайман, Житомир, О. Толесніков, Чернівці)*

303. Про цілі числа $a$, $b$, $c$ та $d$ відомо, що $|ad - bc| = 1$, та $|a| > |c|$. Довести, що

$$a^2 + ab + b^2 \geq c^2 + cd + d^2.$$

*(О. Рибак, Київ)*

298. Let $ABCD$ be convex quadrangle, $M$ be the intersection point of medians of triangle $ABC$ and $N$ be the point at segment $MD$ such that $MN : ND = 1 : 3$. The points $E$ and $F$ are chosen at straight lines $AN$ and $CN$ respectively in in such a way that $ME \parallel AD$ and $MF \parallel CD$. Prove that the straight lines $AF$, $CE$ and $BD$ are concurrent.

*(T. Lazorenko, Kyiv)*

299. Let $ABCD$ a convex quadrilateral with $AB = BC = CD$ and $AC \neq BD$ and let $E$ be the intersection point of diagonals of $ABCD$. Prove that $AE = DE$ if and only if $\angle BAD + \angle ADC = 120°$.

*(Balkan Mathematical Olympiad)*

300. One has a set of stones with weights $1, 2, \ldots, n$ grams ($n \in \mathbb{N}$). Find all $n$ and $k$ for which it is possible to place $k$ and the rest $n - k$ stones from the set respectively on the two pans of a balance so that equilibrium is achieved.

*(O. Rudenko, Kyiv)*

301. Let $a, b, c$ be positive numbers such that $abc \geq 1$. Prove that

$$\frac{a+1}{a^2+a+1} + \frac{b+1}{b^2+b+1} + \frac{c+1}{c^2+c+1} \leq 2.$$

*(B. Pavlyk, D. Mitin, Kyiv)*

302. The vertices of 2007-gon (polygon with 2007 sides) are colored alternately white, black or red. One of the red vertices contains a checker. Two players in turn do two things: move the checker into other vertice along the side of 2007-gon and then erase some side. The game ends when it is impossible to move the checker. At the end of the game if the checker is in the white vertice then the first player wins, if the checker is in the black vertice then the second player wins and if the checker is in the red vertice then it is a draw. Does any of the players have winning strategy? If yes, then who?

*(V. Brayman, Zhytomyr, O. Tolesnikov, Chernivtsi)*

303. Let $a$, $b$, $c$ and $d$ be integers such that $|ad - bc| = 1$ and $|a| > |c|$. Prove that

$$a^2 + ab + b^2 \geq c^2 + cd + d^2.$$

*(O. Rybak, Kyiv)*