Задачі 292 —297

Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горовий та Володимир Некрашевич

292. Клітинки першого рядка таблиці розміром 200×2 пофарбовано червоним, жовтим, зеленим та синім кольорами так, що жодні дві клітинки одного кольору не мають спільної сторони. Чи завжди можна пофарбувати другий рядок тими ж кольорами таким чином, щоб жодні дві клітинки одного кольору не мали спільної сторони та в таблиці було рівно по 100 клітинок кожного з кольорів?

(В. Брайман, Житомир)

293. Всередині даного гострого кута BAC задано точки P і Q такі, що $PQ \not\perp AC$. За допомогою циркуля та лінійки на стороні AB даного кута побудуйте таку точку R, щоб бісектриса RL трикутника PQR була перпендикулярною до сторони AC.

(В. Ясинський, Вінниця)

294. Фотограф зробив декілька знімків на вечірці з 10 учасниками. На кожному знімку зображені дві або три людини та кожна з 45 можливих пар учасників вечірки зображена рівно на одному знімку. Якою є найменша можлива кількість знімків?

(Baltic Way)

295. Нехай $\{F_n,\, n \geq 1\}$ – послідовність Фібоначчі, тобто $F_1 = F_2 = 1$ та $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 1$. Довести, що при $n \geq 2$ для всіх дійсних чисел x виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} F_k |x-k| \geq F_{n+2} + F_n - n - 1.$$

(Р. Ушаков, Київ)

296. Лінія перетину двох площин, що дотикаються описаної навколо тетраедра $ABCD$ сфери в точках A і B лежить в одній площині з прямою CD. Довести, що

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}.$$

(М. Курило, Липова Долина)

297. Для довільних натуральних чисел n, p довести нерівність

$$\left(1 + \frac{2006p^2}{1+2007p}\right)\left(1 + \frac{2006p^2}{2(2+2007p)}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{2006p^2}{n(n+2007p)}\right) < \frac{(2007p)!}{p!(2006p)!}.$$

Чи можна замінити в правій частині $(2007p)!/p!(2006p)!$ на менше число?

(Р. Ушаков, Київ)

292. The cells of the first row of a table of size 200×2 are coloured red, yellow, green or blue so that no cells of the same colour share a side. Prove or disprove that it is possible to colour another row with the same colours so that no cells of the same colour will share a side and the table will contain exactly 100 cells of each colour.

(V. Brayman, Zhytomyr)

293. Points P and Q are chosen inside the acute angle BAC in such way that $PQ \not\perp AC$. Construct with ruler and compass the point R at the side AB such that the bisector RL of triangle PQR is perpendicular to AC.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

294. A photographer took some pictures at a party with 10 people. Each of the 45 possible pairs of people appears together on exactly one photo, and each photo depicts two or three people. What is the smallest possible number of photos taken?

(Baltic Way)

295. Let $\{F_n,\, n \geq 1\}$ be Fibonacci sequence, i.e. $F_1 = F_2 = 1$ and $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 1$. For every integer $n \geq 2$ and for every real number x prove the inequality

$$\sum_{k=1}^{n} F_k |x-k| \geq F_{n+2} + F_n - n - 1.$$

(R. Ushakov, Kyiv)

296. The intersection line of two planes which touch the circumsphere of a tetrahedron $ABCD$ at points A and B is complanar with the straight line CD. Prove that

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}.$$

(M. Kurylo, Lypova Dolyna)

297. For every positive integers n, p prove the inequality

$$\left(1+\frac{2006p^2}{1+2007p}\right)\left(1+\frac{2006p^2}{2(2+2007p)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{2006p^2}{n(n+2007p)}\right) < \frac{(2007p)!}{p!(2006p)!}.$$

Is it possible to replace $(2007p)!/p!(2006p)!$ with some smaller number?

(R. Ushakov, Kyiv)