Задачі 286 —291

Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горовий та Володимир Некрашевич

286. Нехай $ABCDEF$ — шестикутник, в якому $AB \parallel CD \parallel EF$ та $BC \parallel DE \parallel FA$. Довести, що прямі AD, BE та CF перетинаються в одній точці.

(Е. Туркевич, Чернівці)

287. Дано трикутник ABC і точку P всередині. Побудувати точки A_1, B_1, C_1 на прямих BC, AC, AB відповідно так, щоб пряма AP ділила навпіл відрізок B_1C_1, пряма BP ділила навпіл відрізок A_1C_1 та пряма CP ділила навпіл відрізок A_1B_1.

(А. Примак, Київ)

288. Клітинки шахівниці розміром 100×100 пофарбовано 100 різними кольорами. Кожну клітинку пофарбували єдиним кольором та кожен колір використали рівно 100 разів. Довести, що існує рядок або стовпчик дошки, для фарбування якого використали принаймні 10 кольорів.

(Nordic Mathematical Contest)

289. Розглянемо множину M_n всіх чисел вигляду $\{\frac{r_1}{p_1} + \ldots + \frac{r_n}{p_n}\} \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$, де $n \geq 2$, $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots, p_n \ldots$ — послідовність простих чисел, $1 \leq r_k \leq p_k$, $1 \leq k \leq n$ та $\{x\}$ — дробова частина числа x. Довести, що два найменші числа з M_n це 1 та p_{n+1}.

(Ю. Калініченко, Запоріжжя)

290. В рівнобедреній трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$) діагоналі AC та BD перпендикулярні та перетинаються в точці O. Нехай BM та CN – висоти трапеції, P та Q – середини відрізків OM та ON відповідно. Довести, що

$$S_{\triangle ABP} + S_{\triangle DCQ} < S_{\triangle AOD}.$$

(І. Нагель, Євпаторія)

291. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} \quad f(f(x,z), f(z,y)) = f(x,y) + z.$$

(О. Толесніков, Чернівці)

286. Let $ABCDEF$ be a hexagon such that $AB \parallel CD \parallel EF$ and $BC \parallel DE \parallel FA$. Prove that the straight lines AD, BE and CF are concurrent.

(E. Turkevich, Chernivtsi)

287. Triangle ABC and point P inside it are given. Construct points A_1, B_1, C_1 at straight lines BC, AC, AB respectively such that the straight line AP bisects the segment B_1C_1, the straight line BP bisects the segment A_1C_1 and the straight line CP bisects the segment A_1B_1.

(A. Prymak, Kyiv)

288. The squares of a 100×100 chessboard are painted with 100 different colours. Each square has only one colour and every colour is used exactly 100 times. Show that there exists a row or a column on the chessboard in which at least 10 colours are used.

(Nordic Mathematical Contest)

289. Consider the set M_n of all numbers of the form $\{\frac{r_1}{p_1} + \ldots + \frac{r_n}{p_n}\} \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$, where $n \geq 2$, $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots, p_n \ldots$ is the sequence of prime numbers, $1 \leq r_k \leq p_k$, $1 \leq k \leq n$ and $\{x\}$ denotes fractional part of x. Prove that two smallest elements of M_n are 1 and p_{n+1}.

(Yu. Kalinichenko, Zaporizhzhya)

290. Diagonals AC та BD of equilateral trapezium $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$) are orthogonal and intersect each other at point O. Let BM and CN be altitudes of trapezium. Denote by P and Q be the midpoints of OM and ON respectively. Prove that

$$S_{\triangle ABP} + S_{\triangle DCQ} < S_{\triangle AOD}.$$

(I. Nagel, Evpatoria)

291. Find all functions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} \quad f(f(x,z), f(z,y)) = f(x,y) + z.$$

(O. Tolesnikov, Chernivtsi)

Розв'язання задач 250 —255

Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горовий та Володимир Некрашевич

250. Про коефіцієнти многочлена $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ відомо, що $a>0$, $e>0$ та $ad^2+b^2e-4ace<0$. Довести, що цей многочлен не має дійсних коренів.

Розв'язок. Перепишемо многочлен у вигляді

$$\left(\sqrt{a}x^2+\frac{b}{2\sqrt{a}}x\right)^2+\left(\sqrt{e}+\frac{d}{2\sqrt{e}}x\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}-\frac{d^2}{4e}\right)x^2.$$

Цей вираз є додатним при $x\neq 0$, бо коефіцієнт при x^2 дорівнює $\dfrac{4ace-b^2e-ad^2}{4ae}>0$. Зрозуміло, що $x=0$ також не є коренем, бо $e\neq 0$.

(Розв'язок автора)

251. Нехай функція f неперервна на всій дійсній осі та рівняння

$$\underbrace{f(x+f(x+\ldots+f}_{2005}(x)\ldots))=2005x$$

має розв'язок. Довести, що рівняння $f(x)=x$ також має розв'язок.

Розв'язок. Припустимо, що рівняння $f(x)=x$ не має розв'язків. Внаслідок неперервності f це означає, що $f(x)>x$ при всіх $x\in\mathbb{R}$ або $f(x)<x$ при всіх $x\in\mathbb{R}$. В першому з цих випадків при всіх дійсних x маємо

$$\underbrace{f(x+f(x+\ldots+f}_{2005}(x)\ldots))>$$

$$>x+\underbrace{f(x+f(x+\ldots+f}_{2004}(x)\ldots))>\ldots>2004x+f(x)>2005x,$$

суперечність. В другому випадку маємо аналогічну суперечність.

(Розв'язок автора)

252. Кола ω_1 та ω_2 з центрами O_1,O_2 перетинаються в точках A та B. Через точки O_1,O_2,A проведено коло ω, яке перетинає кола ω_1,ω_2 в точках K,M. Довести, що AB — бісектриса кута $\angle KAM$ або кута, суміжного з $\angle KAM$.

Розв'язок. 1 спосіб. Нехай ω_1,ω_2 — кола з центрами O_1,O_2, а ω — коло, що проходить через точки O_1,A,O_2. Нехай O_1 та O_2 лежать по різні боки від прямої AB. Маємо $\angle AKB=\frac{1}{2}\angle AO_1B=\angle AO_1O_2=\angle AKO_2$, бо $\angle AKB$, $\angle AO_1B$ — вписаний та центральний кути для кола ω_1, а $\angle AO_1O_2$, $\angle AKO_2$ — вписані кути для кола ω. Звідси точки K, B, O_2 лежать на одній прямій. Але $\angle AKO_2=\angle MKO_2$ як кути, що спираються на рівні хорди AO_2 та MO_2 кола ω. Тому KO_2, тобто KB, — бісектриса кута $\angle AKM$. Аналогічно MB — бісектриса кута $\angle KMA$ та B — точка перетину бісектрис $\triangle AKM$. Аналогічно у випадку, коли O_1 та O_2 лежать по один бік від AB, доводиться, що B — центр зовнівписаного кола $\triangle AKM$ та AB — бісектриса кута, суміжного з $\angle KAM$.

(Розв'язок автора)

2 спосіб. Нехай O – центр кола ω. Тоді точки A та B симетричні відносно O_1O_2, точки A та K – відносно OO_1, а точки A та M – відносно OO_2. Тому $AB \perp O_1O_2$, $AK \perp OO_1$ та $AM \perp OO_2$. Звідси $\angle KAB = \angle OO_1O_2$ або $\angle KAB = 180^\circ - \angle OO_1O_2$ та $\angle MAB = \angle OO_2O_1$ або $\angle MAB = 180^\circ - \angle OO_2O_1$. Але $\angle OO_1O_2 = \angle OO_2O_1$, бо $OO_1 = OO_2$ як радіуси кола ω. Тому $\angle KAB = \angle MAB$ або $\angle KAB = 180^\circ - \angle MAB$, звідки й випливає твердження задачі.

(В.П.Руссєв)

253. Знайти всі натуральні числа n та k, при яких для всіх дійсних чисел x має місце рівність

$$\sin^n x + \cos^k x = \sin^k x + \cos^n x.$$

Розв'язок. Покладемо $x = \frac{\pi}{3}$. Маємо $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Якщо одне з чисел n та k парне, а інше непарне, то отримуємо рівність раціонального та ірраціонального чисел, суперечність. Якщо n та k непарні та $n = 2m+1, k = 2l+1$, то $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^m - \left(\frac{3}{4}\right)^l\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^m} - \frac{1}{4^l}\right)$ та при $m \neq l$ знову маємо рівність раціонального та ірраціонального чисел. Тому або $n = k$, або n та k парні. Нехай $n = 2m$, $k = 2l$. Тоді маємо рівність $\left(\frac{3}{4}\right)^m - \left(\frac{3}{4}\right)^l = \frac{1}{4^m} - \frac{1}{4^l}$, або $\frac{3^m-1}{4^m} = \frac{3^l-1}{4^l}$. Послідовність $a_j = \frac{3^j-1}{4^j}$ строго спадає при $j \geqslant 2$, бо $a_j - a_{j+1} = \frac{3^j-3}{4^{j+1}} > 0$. Тому з рівності $a_m = a_l$ випливає, що $m = l$, або $m = 2$, $l = 1$, або $l = 2$, $m = 1$. Відповідно $n = k$, або $n = 4$, $k = 2$, або $k = 4$, $n = 2$. Легко перевірити, що при цих значеннях n, k тотожність справджується.

Відповідь: $n = k$; $n = 4, k = 2$; $n = 2, k = 4$.

(Розв'язок автора)

254. Коло ω, яке проходить через вершини B та C трикутника $\triangle ABC$ з $AB \neq AC$, перетинає сторони AB та AC вдруге в точках R та S. Нехай M — середина BC. Перпендикуляр до MA в точці A перетинає BS та CR в точках K та T відповідно. Довести, що якщо $TA = AK$, то $MS = MR$.

Розв'язок. Нехай $AB > AC$. Позначимо B' точку, симетричну до B відносно прямої AM. Нехай P — точка перетину $B'C$ та TK, Q — точка перетину TC та BK. Оскільки M — середина AB, то легко перевірити, що точки B та C знаходяться на однаковій відстані від прямої AM, а отже точки B' та C знаходяться на однаковій відстані від прямої AM. Тому $B'C \| AM$, звідки $\angle TPB' = 90^\circ$. Маємо $\angle RBK = \angle TCA$, бо вони спираються на дугу RS. Внаслідок симетрії відносно AM також маємо $\angle TKB = \angle B'TK$ і $\angle ABK = \angle TB'A$. Тепер

$$\angle RBQ + \angle RQB = \angle RBQ + \angle QTK + \angle TKQ = \angle RCS + \angle QTK + \angle B'TK.$$

Оскільки $\angle TCA = \angle ABK = \angle TB'A$, то точки T, A, C, B' лежать на одному колі. Тому $\angle RCS = \angle TCA = \angle TB'A$ і $\angle QTK = \angle ATC = \angle AB'C$ (тут використали, що точка B' далі від TK, ніж точка C), а отже

$$\angle RBQ + \angle RQB = \angle RCS + \angle QTK + \angle B'TK = \\ = \angle TB'A + \angle AB'C + \angle B'TK = 180^\circ - \angle TPB' = 90^\circ.$$

Звідси $\angle BRC = 90^\circ$, а отже BC — діаметр, тобто точки R, S лежать на колі з центром в точці M. Тому $MR = MS$ як радіуси.

255. Числа $a, b, c > 1$ задовольняють рівність $a + b + c = abc$. Довести, що

$$(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1) \le 8.$$

Розв'язок. Маємо $c = \frac{a+b}{ab-1}$, а отже нерівність перепишеться у вигляді

$$(a^2-1)(b^2-1)\left(\frac{(a+b)^2}{(ab-1)^2} - 1\right) \le 8, \quad \text{або}$$

$$(a^2-1)(b^2-1)(a^2+2ab+b^2-a^2b^2+2ab-1) \le 8(ab-1)^2,$$
$$(a^2-1)(b^2-1)(a^2b^2-4ab-a^2-b^2+1) + 8(ab-1)^2 \ge 0,$$
$$(a^2-1)^2(b^2-1)^2 + 8(ab-1)^2 \ge 4ab(a^2-1)(b^2-1).$$

За нерівністю Коші маємо

$$(a^2-1)^2(b^2-1)^2 + 4(ab-1)^2 \ge 4(a^2-1)(b^2-1)(ab-1),$$

і тепер достатньо довести, що

$$4(a^2-1)(b^2-1)(ab-1) + 4(ab-1)^2 \ge 4ab(a^2-1)(b^2-1),$$
$$(a^2-1)(b^2-1)(ab-1) + (ab-1)^2 \ge ab(a^2-1)(b^2-1),$$
$$(ab-1)^2 \ge (a^2-1)(b^2-1),$$
$$a^2b^2 - 2ab + 1 \ge a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1, \quad (a-b)^2 \ge 0,$$

нерівність доведено.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Макарчук О. *(смт. Добровеличівка, Кіровоградська обл.)* 250, 251, 252;
Руссєв В. *(с. Делени, Одеська обл.)* 250, 251, 252, 253, 255.