

Задачі 280 — 285

Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горювий та Володимир Некрашевич

280. Розв'язати рівняння $\sqrt{2 - 2 \cos x} + \sqrt{5 - 4 \cos x} = \sqrt{5 - 4 \cos 2x}$.

(В. Ясінський, Вінниця)

281. Знайти всі натуральні числа n , для яких $n^2 + 78n - 2006$ ділиться на добуток цифр числа n .

(В. Брайман, Житомир)

282. В опуклому п'ятикутнику $ABCDE$ відомо, що $\angle ABC = \angle CDE = 90^\circ$ та $\angle BAC = \angle CED = \alpha$. Нехай M — середина AE . Знайти $\angle BMD$.

(О. Рибак, Київ)

283. Побудувати трикутник ABC за вершиною A , центром вписаного кола I та точкою перетину медіан M .

(О. Макарчук, Добровеличківка, Кіровоградська обл.)

284. Знайти усі трійки функцій f, g, h таких, що

$$f(h(g(x)) + y) + g(z + f(y)) = h(y) + g(y + f(z)) + x$$

при усіх дійсних x, y, z .

(С. Слободянюк, Київ)

285. Дано опуклий n -кутник. Розглянемо множину T правильних трикутників зі стороною 1, всі вершини яких є вершинами даного n -кутника.

а) Довести, що в множині T не більше $\frac{2n}{3}$ трикутників.

б) Довести, що при кожному $0 < \lambda < \frac{2}{3}$ існує n -кутник, для якого множина T містить більше λn трикутників.

(В. Ясінський, Вінниця)

280. Solve the equation $\sqrt{2 - 2 \cos x} + \sqrt{5 - 4 \cos x} = \sqrt{5 - 4 \cos 2x}$.

(V. Yasinsky, Vinnytsya)

281. Find all positive integers n such that $n^2 + 78n - 2006$ is divisible by the product of digits of n .

(V. Brayman, Zhytomyr)

282. Let $ABCDE$ be a convex pentagon $ABCDE$ such that $\angle ABC = \angle CDE = 90^\circ$ and $\angle BAC = \angle CED = \alpha$. Let M be the midpoint of AE . Find $\angle BMD$.

(O. Rybak, Kyiv)

283. Construct the triangle ABC if known are the vertex A , the incenter I and the intersection point of the medians M .

(O. Makarchuk, Dobrovelychkivka)

284. Find all triples of functions f, g, h such that the identity

$$f(h(g(x)) + y) + g(z + f(y)) = h(y) + g(y + f(z)) + x$$

holds for every real x, y, z .

(S. Slobodyanyuk, Kyiv)

285. Consider the set T of equilateral triangles with side length 1 all the vertices of which are among the vertices of a given convex n -gon.

a) Prove that the set T contains at most $\frac{2n}{3}$ triangles.

b) Prove that for every $0 < \lambda < \frac{2}{3}$ there exists a convex n -gon such that the corresponding set T contains more than λn triangles.

(V. Yasinsky, Vinnytsya)