Задачі 274 —279

Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горовий та Володимир Некрашевич

274. Нехай I — центр кола, вписаного в трикутник $\triangle ABC$. Прямі AI, BI та CI перетинають коло ω, описане навколо трикутника $\triangle ABC$, вдруге в точках D, E та F відповідно. Нехай DK — діаметр кола ω та N — точка перетину KI з EF. Довести, що $KN = IN$.

(Т. Тимошкевич, Київ)

275. Довести, що існує нескінченно багато пар цілих чисел a, b таких, що $a^{2006} + 1$ ділиться на b та $b^{2006} + 1$ ділиться на a.

(В. Брайман, Житомир)

276. Нехай $ABCD$ — трапеція, коло ω_1 з центром O_1 вписане в трикутник $\triangle ABD$, а коло ω_2 з центром O_2 дотикається сторони CD та продовжень сторін BC і BD трикутника $\triangle BCD$, причому $AD \parallel O_1O_2 \parallel BC$. Довести, що $AC = O_1O_2$.

(В. Ясинський, Вінниця)

277. В компанії з $2N$ хлопчиків та 2005 дівчаток для кожної пари дівчаток рівно N хлопчиків знайомі рівно з однією з них. Довести, що кількість хлопчиків, знайомих з усіма дівчатами, не перевищує $\frac{N}{1003}$.

(О. Клурман, Львів)

278. Для довільних чисел $a, b, c \geq 0$ довести нерівність

$$\sqrt{a^4 + \frac{b^4}{2} + \frac{c^4}{2}} + \sqrt{b^4 + \frac{c^4}{2} + \frac{a^4}{2}} + \sqrt{c^4 + \frac{a^4}{2} + \frac{b^4}{2}} \geq \sqrt{a^4 + b^3c} + \sqrt{b^4 + c^3a} + \sqrt{c^4 + a^3b}.$$

(О. Рибак, Київ)

279. Натуральні числа, які мають непарну кількість різних простих дільників, пофарбували в жовтий колір, а натуральні числа, які мають парну кількість різних простих дільників, в блакитний. Чи існує нескінчена арифметична прогресія одного кольору?

(Т. Тимошкевич, Київ)

274. Let I be the incenter of triangle $\triangle ABC$. The straight lines AI, BI and CI intersect the outcircle ω of triangle $\triangle ABC$ at points D, E and F respectively. Let DK be the diameter of ω and N be the intersection point of KI and EF. Prove that $KN = IN$.

(T. Tymoshkevych, Kyiv)

275. Prove that there exist infinitely many pairs of integers a, b such that $a^{2006} + 1$ is divisible by b and $b^{2006} + 1$ is divisible by a.

(V. Brayman, Zhytomyr)

276. Let $ABCD$ be a trapezium. The circle ω_1 with center O_1 is inscribed into the triangle $\triangle ABD$ and the circle ω_2 with center O_2 touches the side CD and the extensions of the sides BC and BD of the triangle $\triangle BCD$. It is known that $AD \parallel O_1O_2 \parallel BC$. Prove that $AC = O_1O_2$.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

277. In a company of $2N$ boys and 2005 girls for every pair of girls exactly N boys know just one of this girls. Prove that the number of boys who know all the girls don't exceed $\frac{N}{1003}$.

(O. Klurman, Lviv)

278. For every $a, b, c \geq 0$ prove the inequality

$$\sqrt{a^4 + \frac{b^4}{2} + \frac{c^4}{2}} + \sqrt{b^4 + \frac{c^4}{2} + \frac{a^4}{2}} + \sqrt{c^4 + \frac{a^4}{2} + \frac{b^4}{2}} \geq \sqrt{a^4 + b^3c} + \sqrt{b^4 + c^3a} + \sqrt{c^4 + a^3b}.$$

(O. Rybak, Kyiv)

279. Positive integers which have odd number of distinct prime divisors are coloured yellow and positive integers which have even number of distinct prime divisors are coloured blue. Does there exist an infinite arithmetic progression which contains only yellow or only blue integers?

(T. Tymoshkevych, Kyiv)