Задачі 268 —273

Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горовий та Володимир Некрашевич

268. Знайти всі натуральні числа n, при яких $n^{2006} + n + 1$ є простим числом.

(І. Нагель, Євпаторія)

269. Дано правильний трикутник $\triangle ABC$ і точку M, яка лежить всередині нього. Позначимо A_1, B_1, C_1 точки перетину прямих AM та BC, BM та AC, CM та AB відповідно. Довести нерівність

$$A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1 \geq \frac{1}{2}(A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A + AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1).$$

(В. Ясинський, Вінниця)

270. Дано коло ω та коло ω_1, яке дотикається ω внутрішнім чином в точці A. Побудувати на колі ω точку $X \neq A$ так, щоб кут між дотичними, проведеними до ω_1 з точки X, був заданим.

(А. Примак, Київ)

271. Розв'язати нерівність $x^2 \cdot [x] \leq \sqrt{2006 - x^2}$.
(тут $[x]$ позначає цілу частину числа x.) *(В. Ясинський, Вінниця)*

272. Нехай $\mathbf{S} = \{(a, b) | a = 1, 2, \ldots, n,\ b = 1, 2, 3\}$. Назвемо *туром шахової тури* на $\mathbf{S}$ ламану, яка складається з відрізків, що з'єднують точки $p_1, p_2, \ldots, p_{3n}$ в такій послідовності, що

   (i) всі точки p_i належать множині $\mathbf{S}$,

   (ii) при $1 \leq i < 3n$ відстань між точками p_i та p_{i+1} дорівнює 1,

   (iii) для кожного $p \in \mathbf{S}$ існує єдине i таке, що $p_i = p$.

   Скільки існує турів шахової тури, що починаються в точці $(1, 1)$ та закінчуються в точці $(n, 1)$?

(William Lowell Putnam Math. Competition)

273. Нехай I — центр вписаного кола трикутника $\triangle ABC$. Кола, описані навколо трикутників $\triangle AIC$ та $\triangle AIB$, перетинають сторони AB та AC відповідно в точках K та N. На відрізку KN взяли довільну точку M. Довести, що сума відстаней від точки M до сторін трикутника $\triangle ABC$ не залежить від вибору точки M.

(І. Нагель, Євпаторія)

268. Find all positive integers n such that $n^{2006} + n + 1$ is a prime number.

(I. Nagel, Evpatoria)

269. Let M be an arbitrary point inside the equilateral triangle $\triangle ABC$. Denote by A_1, B_1, C_1 the intersection points of the straight lines AM and BC, BM and AC, CM and AB respectively. Prove that

$$A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1 \geq \frac{1}{2}(A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A + AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1).$$

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

270. Given are the circle ω and the circle ω_1 which touches ω in inner way at point A. Construct the point $X \neq A$ at ω such that the angle between the tangent lines from X to ω_1 is equal to the given angle.

(A. Prymak, Kyiv)

271. Solve the equation $x^2 \cdot [x] \leq \sqrt{2006 - x^2}$.
(here $[x]$ denotes the integer part of x.) *(V. Yasinskyy, Vinnytsya)*

272. Let $\mathbf{S} = \{(a, b) | a = 1, 2, \ldots, n, b = 1, 2, 3\}$. A *rook tour* of $\mathbf{S}$ is a polygonal path made up of line segments connecting points $p_1, p_2, \ldots, p_{3n}$ in sequence such that

(i) $p_i \in \mathbf{S}$,

(ii) p_i and p_{i+1} are a unit distance apart, for $1 \leq i < 3n$,

(iii) for each $p \in \mathbf{S}$ there is a unique i such that $p_i = p$.

How many rook tours are there that begin at $(1, 1)$ and end at $(n, 1)$?

(William Lowell Putnam Math. Competition)

273. Let I be the incenter of triangle $\triangle ABC$. The circumcircles of $\triangle AIC$ and $\triangle AIB$ intersect sides AB and AC respectively at points K and N. Let M be an arbitrary point of the segment KN. Prove that the sum of the distances from M to the sides of triangle $\triangle ABC$ does not depend on the choice of point M.

(I. Nagel, Evpatoria)