Задачі 262 —267

Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горовий та Володимир Некрашевич

262. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ кола, вписані в трикутники $\triangle ABC$ та $\triangle ABD$, дотикаються AB в точках M та N, а кола, вписані в трикутники $\triangle BCD$ та $\triangle ACD$, дотикаються CD в точках K та L. Довести, що $MN = KL$.

(А. Примак, Київ)

263. Про дійсні числа x, y, z відомо, що

$$\begin{cases} |x+y+z| \le 1, \\ |x-y+z| \le 1, \\ |4x+2y+z| \le 8, \\ |4x-2y+z| \le 8. \end{cases}$$

Довести, що $|x| + 3|y| + |z| \le 7$.

(В. Ясинський, Вінниця)

264. Гострокутний трикутник $\triangle AKN$ вписано в коло з центром в точці O. На стороні KN взяли довільну точку H та провели $HI \perp NA$, $HM \perp KA$. Довести, що ламана MOI ділить площу трикутника $\triangle AKN$ навпіл.

(І. Нагель, Євпаторія)

265. Знайти всі прості числа p такі, що для будь-якого натурального s $2^{p^s} + 1$ ділиться на p^{s+1}.

(О. Манзюк, А. Примак, Київ)

266. Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник. Промені AB та DC, BC та AD перетинаються в точках E, F відповідно. Бісектриси кутів $\angle AED$ та $\angle BFA$ перетинаються в точці K під прямим кутом. Довести, що

$$S_{\triangle AKB} + S_{\triangle CKD} = S_{\triangle BKC} + S_{\triangle AKD}.$$

(О. Макарчук, Добровеличківка, Кіровоградська обл.)

267. Знайти всі натуральні значення $n > 1$, для яких виконується рівність

$$\left[\frac{\sqrt[n]{1}}{1} + \frac{\sqrt[n]{2}}{2} + \frac{\sqrt[n]{3}}{3} + \ldots + \frac{\sqrt[n]{2^n}}{2^n} \right] = 2005.$$

(тут $[x]$ позначає цілу частину числа x.)

(В. Ясинський, Вінниця)

262. Let $ABCD$ be a convex quadrangle. The incircles of triangles $\triangle ABC$ and $\triangle ABD$ touch AB at M and N. The incircles of triangles $\triangle BCD$ and $\triangle ACD$ touch CD at K and L. Prove that $MN = KL$.

(A. Prymak, Kyiv)

263. Let x, y, z be real numbers such that

$$\begin{cases} |x+y+z| \le 1, \\ |x-y+z| \le 1, \\ |4x+2y+z| \le 8, \\ |4x-2y+z| \le 8. \end{cases}$$

Prove that $|x| + 3|y| + |z| \le 7$.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

264. Let O be the circumcenter of acute triangle $\triangle AKN$. The point H is chosen at side KN in arbitrary way. Let I at AN and M at AK be such that $HI \perp NA$ and $HM \perp KA$. Prove that the broken line MOI bisects the area of $\triangle AKN$.

(I. Nagel, Evpatoria)

265. Find all prime numbers p such that for every positive integer s $\quad 2^{p^s} + 1$ is divisible by p^{s+1}.

(O. Manzjuk, A. Prymak, Kyiv)

266. Let $ABCD$ be a convex quadrangle. The rays AB and DC, BC and AD intersect at points E, F respectively. The angle bisectors of $\angle AED$ and $\angle BFA$ intersect at K in such a way that $\angle EKF = 90°$. Prove that

$$S_{\triangle AKB} + S_{\triangle CKD} = S_{\triangle BKC} + S_{\triangle AKD}.$$

(O. Makarchuk, Dobrovelychkivka)

267. Find all positive integers $n > 1$ such that the equality

$$\left[\frac{\sqrt[n]{1}}{1} + \frac{\sqrt[n]{2}}{2} + \frac{\sqrt[n]{3}}{3} + \ldots + \frac{\sqrt[n]{2^n}}{2^n} \right] = 2005 \quad \text{holds.}$$

(here $[x]$ denotes the integer part of x.)

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)