Задачі 256 —261

Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горовий та Володимир Некрашевич

256. Чи існує такий многочлен $P(x)$, що
$a) P(\sin x) = \cos^{2004} x$; $\quad b) P(\sin x) = \cos^{2005} x \quad$ для всіх $x \in \mathbb{R}$?

(Б. Байденко, Київ)

257. Точки M_1 та M_2 лежать всередині трикутника $\triangle ABC$. На сторонах AB, BC, AC вибрали точки C_1 та C_2, A_1 та A_2, B_1 та B_2 відповідно так, що

$$A_1M_1 \| M_2B_2 \| AB, \quad B_1M_1 \| M_2C_2 \| BC, \quad C_1M_1 \| M_2A_2 \| AC.$$

Виявилось, що $A_1M_1 = B_1M_1 = C_1M_1 = l_1$, $A_2M_2 = B_2M_2 = C_2M_2 = l_2$. Довести, що $l_1 = l_2$.

(Е. Туркевич, Чернівці)

258. Розв'язати рівняння $x^y - y^x = xy^2 - 19$ в простих числах.

(Balkan Mathematical Olympiad)

259. До короля Артура приїхали сто лицарів, деякі з яких ворогують між собою. Кожна з 2005 пар лицарів-ворогів відмовляється сидіти за одним столом. Скільки столів повинен мати король Артур щоб бути впевненим, що зможе розсадити за ними цих лицарів?

(В. Брайман, Житомир)

260. Нехай A — одна з точок перетину кіл ω_1 та ω_2 з центрами O_1, O_2. Пряма l дотикається кіл ω_1 та ω_2 в точках B, C відповідно. Позначимо O_3 центр кола, описаного навколо $\triangle ABC$. На продовженні O_3A за точку A відкладемо $AD = O_3A$. Нехай M — середина O_1O_2. Довести, що $\angle O_1DM = \angle O_2DA$.

(О. Клурман, Львів)

261. Позначимо $S(n)$ суму цифр натурального числа n. Довести, що послідовність $\left\{\frac{S(n)}{S(n^2)},\ n \geq 1\right\}$ є необмеженою.

(Е. Туркевич, Чернівці)

256. Does there exist a polynomial $P(x)$ such that

$a)P(\sin x) = \cos^{2004} x; \quad b)P(\sin x) = \cos^{2005} x \quad$ holds for every $x \in \mathbb{R}$?

(B. Baydenko, Kyiv)

257. Points M_1 and M_2 lie inside the triangle $\triangle ABC$. Points C_1 and C_2, A_1 and A_2, B_1 and B_2 are chosen at AB, BC, AC respectively such that

$$A_1M_1 \| M_2B_2 \| AB, \quad B_1M_1 \| M_2C_2 \| BC, \quad C_1M_1 \| M_2A_2 \| AC.$$

It is known that $A_1M_1 = B_1M_1 = C_1M_1 = l_1$, $A_2M_2 = B_2M_2 = C_2M_2 = l_2$. Prove that $l_1 = l_2$.

(E. Tyrkevych, Chernivtsi)

258. Solve in prime numbers the equation $x^y - y^x = xy^2 - 19$.

(Balkan Mathematical Olympiad)

259. A hundred of knights some of which are at enmity among themselves came to king Arthur. Each of 2005 pairs of knights who are at enmity deny sitting at the same table. How many tables needs king Arthur to be sure that he can seat his guests?

(V. Brayman, Zhytomyr)

260. Let A be one of the intersection points of the circles ω_1 and ω_2 with centres O_1, O_2. The straight line l is tangent to ω_1 and ω_2 at points B, C respectively. Denote by O_3 the circumcenter of triangle $\triangle ABC$. Let D be such point that A is a midpoint of O_3D. Denote by M the midpoint of O_1O_2. Prove that $\angle O_1DM = \angle O_2DA$.

(O. Klurman, Lviv)

261. Denote by $S(n)$ the sum of the digits of positive integer n. Prove that the sequence $\left\{\frac{S(n)}{S(n^2)},\ n \geq 1\right\}$ is unbounded.

(E. Tyrkevych, Chernivtsi)