Задачі 250 —255

Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горовий та Володимир Некрашевич

250. Про коефіцієнти многочлена $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ відомо, що $a > 0$, $e > 0$ та $ad^2 + b^2e - 4ace < 0$. Довести, що цей многочлен не має дійсних коренів.

(Д. Мітін, Київ)

251. Нехай функція f неперервна на всій дійсній осі та рівняння

$$\underbrace{f(x + f(x + \ldots + f}_{2005}(x)\ldots)) = 2005x$$

має розв'язок. Довести, що рівняння $f(x) = x$ також має розв'язок.

(Б. Байденко, Київ)

252. Кола ω_1 та ω_2 з центрами O_1, O_2 перетинаються в точках A та B. Через точки O_1, O_2, A проведено коло ω, яке перетинає кола ω_1, ω_2 в точках K, M. Довести, що AB — бісектриса кута $\angle KAM$ або кута, суміжного з $\angle KAM$.

(Т. Тимошкевич, Київ)

253. Знайти всі натуральні числа n та k, при яких для всіх дійсних чисел x має місце рівність

$$\sin^n x + \cos^k x = \sin^k x + \cos^n x.$$

(В. Брайман, Житомир)

254. Коло ω, яке проходить через вершини B та C трикутника $\triangle ABC$ з $AB \neq AC$, перетинає сторони AB та AC вдруге в точках R та S. Нехай M — середина BC. Перпендикуляр до MA в точці A перетинає BS та CR в точках K та T відповідно. Довести, що якщо $TA = AK$, то $MS = MR$.

(О. Клурман, Львів)

255. Числа $a, b, c > 1$ задовольняють рівність $a + b + c = abc$. Довести, що

$$(a^2 - 1)(b^2 - 1)(c^2 - 1) \leq 8.$$

(О. Макарчук, Доброведичівка)

250. The coefficients of a polynomial $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ are such that $a > 0$, $e > 0$ and $ad^2 + b^2e - 4ace < 0$. Prove that this polynomial has no real roots.

(D. Mitin, Kyiv)

251. Let f be a continuous function on $\mathbb{R}$. It is known that the equation

$$\underbrace{f(x + f(x + \ldots + f}_{2005}(x)\ldots)) = 2005x$$

has a solution. Prove that the equation $f(x) = x$ also has a solution.

(B. Baydenko, Kyiv)

252. The circles ω_1 and ω_2 with centres O_1, O_2 intersect at points A and B. The circle ω, passing through O_1, O_2, A intersects ω_1 and ω_2 again in points K, M respectively. Prove that AB is a bisector of $\angle KAM$ or of angle adjacent to $\angle KAM$.

(T. Tymoshkevych, Kyiv)

253. Find all positive integers n and k, such that for every real x the identity

$$\sin^n x + \cos^k x = \sin^k x + \cos^n x$$

holds true.

(V. Brayman, Zhytomyr)

254. The circle ω passing through the vertices B and C of a triangle $\triangle ABC$ with $AB \neq AC$ intersects the sides AB and AC at R and S. Let M be the midpoint of BC. The straight line perpendicular to MA at A intersects BS and CR at K and T respectively. Prove that if $TA = AK$ then $MS = MR$.

(O. Klurman, Lviv)

255. Let $a, b, c > 1$ be such that $a + b + c = abc$. Prove the inequality

$$(a^2 - 1)(b^2 - 1)(c^2 - 1) \leq 8.$$

(O. Makarchuk, Dobrovelychkivka)