Задачі 244 —249

Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горовий та Володимир Некрашевич

244. Довести, що рівняння

$$k^4 + (k+1)^4 + (k+2)^4 = n^2 + (n+1)^2$$

не має розв'язків у цілих числах.

(Б. Рубльов, Київ)

245. Нехай AC — найдовша сторона трикутника $\triangle ABC$, BB_1 — висота та H — ортоцентр цього трикутника. Довести, що якщо $BH = 2B_1H$, то трикутник $\triangle ABC$ правильний.

(Е. Туркевич, Чернівці)

246. Послідовність $\{u_n, n \geq 0\}$ задовольняє умови $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ та

$$u_n u_{n+3} - u_{n+1} u_{n+2} = n!$$

при $n \geq 0$. Довести, що всі числа $u_n, n \geq 0$, є цілими (тут 0!=1).

(William Lowell Putnam Math. Competition)

247. Нехай $ABCDEF$ – правильний шестикутник. Позначимо G, H, I, J, K, L точки перетину сторін трикутників $\triangle ACE$ та $\triangle BDF$. Чи існує таке взаємно-однозначне відображення f, що переводить A, B, C, D, E, F у G, H, I, J, K, L та навпаки, причому кожні чотири точки, що лежать на одній прямій, переходять у точки, що лежать на одному колі?

(О. Кукуш, Київ)

248. Для довільних $1 \leq a, b, c, d \leq 2$ довести нерівність

$$\frac{4}{3} \leq \frac{a}{b+cd} + \frac{b}{c+da} + \frac{c}{d+ab} + \frac{d}{a+bc} \leq 2.$$

(В. Брайман, Житомир)

249. На бічних сторонах DA, DB, DC правильної трикутної піраміди $DABC$ взяті точки A_1, B_1, C_1 відповідно так, що площини ABC та $A_1B_1C_1$ паралельні. Нехай O — центр сфери, що проходить через точки D, A_1, B_1, C. Довести, що пряма DO перпендикулярна площині ABC_1.

(М. Курило, Липова Долина)

244. Prove that the equation

$$k^4 + (k+1)^4 + (k+2)^4 = n^2 + (n+1)^2$$

has no integer solutions.

(B. Rublyov, Kyiv)

245. Let AC be the longest side of triangle $\triangle ABC$, BB_1 be the altitude and H be the intersection point of the altitudes of triangle $\triangle ABC$. Prove that if $BH = 2B_1H$ then $\triangle ABC$ is an equilateral triangle.

(E. Tyrkevych, Chernivtsi)

246. Define a sequence $\{u_n, n \geq 0\}$ by $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ and thereafter by the condition

$$u_n u_{n+3} - u_{n+1} u_{n+2} = n!$$

при $n \geq 0$. Show that u_n is an integer for all n (By condition, $0!{=}1$).

(William Lowell Putnam Math. Competition)

247. Let $ABCDEF$ be a regular hexagon. Denote by G, H, I, J, K, L the intersection points of the sides of triangles $\triangle ACE$ and $\triangle BDF$. Does there exist a bijection f which maps A, B, C, D, E, F onto G, H, I, J, K, L and vice versa such that the images of any four points lying on some straight line belong to some circle?

(O. Kukush, Kyiv)

248. For every $1 \leq a, b, c, d \leq 2$ prove the inequality

$$\frac{4}{3} \leq \frac{a}{b+cd} + \frac{b}{c+da} + \frac{c}{d+ab} + \frac{d}{a+bc} \leq 2.$$

(V. Brayman, Zhytomyr)

249. Let $DABC$ be a regular trihedral pyramid. The points A_1, B_1, C_1 are chosen at lateral edges DA, DB, DC respectively such that the planes ABC and $A_1B_1C_1$ are parallel. Let O be the circumcenter of DA_1B_1C. Prove that DO is perpendicular to the plane ABC_1.

(M. Kurylo, Lypova Dolyna)