Задачі 238 —243

Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горовий та Володимир Некрашевич

238. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_2x_3x_4 = a_1(x_2x_3 + x_3x_4 + x_2x_4), \\ x_1x_3x_4 = a_2(x_1x_3 + x_3x_4 + x_1x_4), \\ x_1x_2x_4 = a_3(x_1x_2 + x_2x_4 + x_1x_4), \\ x_1x_2x_3 = a_4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3), \end{cases}$$

де $a_i \neq 0,\ 1 \leq i \leq 4.$

(О. Наровлянський, Чернігів)

239. Нехай для натурального n A_n — множина точок площини з цілими координатами (x, y) такими, що $|x| + |y| \leq 2n$. Знаходячись у точці з A_n, коник може стрибнути в будь-яку іншу точку з A_n, віддалену рівно на 1. Яку найбільшу довжину може мати маршрут коника, що проходить через точки множини A_n, якщо відомо, що в жодній точці він не був більше одного разу?

(А. Примак, Київ)

240. На сторонах різностороннього трикутника $\triangle ABC$ назовні побудовано подібні рівнобедрені трикутники $\triangle AC_1B, \triangle BA_1C$ та $\triangle CB_1A$ з основами AB, BC та AC відповідно. Довести, що якщо $A_1B_1 = B_1C_1$, то $\angle BAC_1 = 30°$.

(Е. Туркевич, Чернівці)

241. Про 2004 натуральних числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$ відомо, що $a_1 = 2004$ та

$$a_{n+1} = \left[\frac{a_n + [\frac{2004}{a_n}]}{2}\right],\ 1 \leq n \leq 2003.$$

Знайдіть найменше серед цих чисел.

(В. Ясинський, Вінниця)

242. У опуклому n-кутнику відмітили вершини та декілька точок всередині так, що жодні три відмічені точки не лежать на одній прямій. Потім n-кутник розбили на трикутники з вершинами у відмічених точках. Виявилось, що кожна відмічена точка, що лежить всередині трикутника, належить рівно 6 трикутникам розбиття. Довести, що знайдуться принаймні 3 вершини n-кутника, кожна з яких належить щонайбільше двом трикутникам розбиття.

(Т. Маловічко, Київ)

243. Нехай I — центр кола, вписаного в $\triangle ABC$, r — його радіус. Пряма l проходить через точку I та перетинає вписане коло у точках P і Q, а коло, описане навколо $\triangle ABC$, — у точках M і N, причому P лежить між точками M та I. Довести, що $MP + NQ \geq 2r$.

(В. Ясинський, Вінниця)

238. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x_2x_3x_4 = a_1(x_2x_3 + x_3x_4 + x_2x_4), \\ x_1x_3x_4 = a_2(x_1x_3 + x_3x_4 + x_1x_4), \\ x_1x_2x_4 = a_3(x_1x_2 + x_2x_4 + x_1x_4), \\ x_1x_2x_3 = a_4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3), \end{cases}$$

where $a_i \neq 0,\ 1 \leq i \leq 4$.

(O. Narovlyansky, Chernigiv)

239. For a positive integer n denote by A_n the set of points with integer coordinates (x, y) such that $|x| + |y| \leq 2n$. A grass-hopper can jump from a point of A_n into another point of A_n if the distance between the points is 1. Find the biggest possible length of grass-hopper's walk in A_n, if no point is visited more than one time.

(A. Prymak, Kyiv)

240. The similar isosceles triangles $\triangle AC_1B, \triangle BA_1C$ and $\triangle CB_1A$ with bases AB, BC and AC respectively are constructed externally on the sides of non-isosceles triangle $\triangle ABC$. Prove that if $A_1B_1 = B_1C_1$ then $\angle BAC_1 = 30^\circ$.

(E. Tyrkevych, Chernivtsi)

241. It is known that $a_1 = 2004$ and

$$a_{n+1} = \left[\frac{a_n + \left[\frac{2004}{a_n}\right]}{2}\right],\ 1 \leq n \leq 2003.$$

Find the minimum of $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

242. The vertices of a convex n-gon and some points inside it are chosen in such way that no 3 chosen points are concurrent. The n-gon is dissected into triangles with chosen vertices. It is known that every chosen vertex inside the n-gon belongs to exactly 6 triangles of dissection. Prove that there exist at least 3 vertices of the n-gon which belongs to at most 2 triangles of dissection.

(T. Malovichko, Kyiv)

243. Let I be the incentre of triangle $\triangle ABC$ and r be corresponding inradius. The straight line l passing through I intersects the incircle of $\triangle ABC$ at points P and Q and the circumcircle of $\triangle ABC$ at points M and N, where P lies between M and I. Prove that $MP + NQ \geq 2r$.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)