Задачі 232 —237

Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горовий та Володимир Некрашевич

232. Нехай $S(n)$ — сума цифр натурального числа n і послідовність (a_n) визначена рівностями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = S(a_n + S(a_n))$ для всіх $n \geq 1$.

Знайти значення виразу

$$a_1 + S(a_2) + S(S(a_3)) + \ldots + \underbrace{S(\ldots(S}_{2004}(a_{2005}))).$$

(В. Ясинський, Вінниця)

233. Нехай a, b, c та n — такі натуральні числа, що $(a + bc)(b + ac) = 5^n$. Довести, що n — парне.

(В. Брайман, Житомир)

234. Про дійсні числа a, b, c відомо, що $a + b + c = 2$ та $ab + bc + ca = 1$. Довести, що

$$\max\{a, b, c\} - \min\{a, b, c\} \leq \sqrt{\frac{4}{3}}$$

(В. Ясинський, Вінниця)

235. Коло ω вписане в трикутник ABC та дотикається сторін BC, AC, AB в точках K, L, M відповідно. Перпендикуляри, опущені з точок K, L та M на LM, KM та KL, перетинають коло ω в точках P, Q та R відповідно. Довести, що прямі AP, BQ та CR перетинаються в одній точці.

(О. Манзюк, А. Примак, Київ)

236. П'ять перпендикулярів, опущених з точок перетину діагоналей опуклого п'ятикутника на найближчі сторони перетинаються в одній точці. Чи можуть всі вершини цього п'ятикутника мати цілі координати?

(А. Гоголєв, Київ)

237. Нехай $x, y, z > 0$. Довести нерівність

$$(1 + xyz)\left(\frac{1}{x(y+1)} + \frac{1}{y(z+1)} + \frac{1}{z(x+1)}\right) \geq 3.$$

(Д. Мавло, Москва)

232. Denote by $S(n)$ the sum of digits of integer n. The sequence (a_n) is defined as follows: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = S(a_n + S(a_n))$ for every $n \geq 1$.

Find

$$a_1 + S(a_2) + S(S(a_3)) + \ldots + \underbrace{S(\ldots(S}_{2004}(a_{2005}))).$$

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

233. Let a, b, c and n be positive integers such that $(a + bc)(b + ac) = 5^n$. Prove that n is even.

(V. Brayman, Zhytomyr)

234. Let a, b, c be such real numbers that $a + b + c = 2$ and $ab + bc + ca = 1$. Prove that

$$\max\{a, b, c\} - \min\{a, b, c\} \leq \sqrt{\frac{4}{3}}$$

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

235. The circle ω inscribed into ABC touches sides BC, AC, AB at K, L, M respectively. The perpendiculars at K, L and M to LM, KM and KL, intersect the circle ω at P, Q and R respectively. Prove that the straight lines AP, BQ and CR are concurrent.

(O. Manzjuk, A. Prymak, Kyiv)

236. Five perpendiculars from the intersection points of diagonals of a convex pentagon to the nearest sides are concurrent. Can the coordinates of all vertices of the pentagon be integers?

(A. Gogolev, Kyiv)

237. Prove the inequality

$$(1 + xyz)\left(\frac{1}{x(y+1)} + \frac{1}{y(z+1)} + \frac{1}{z(x+1)}\right) \geq 3,$$

where $x, y, z > 0$.

(D. Mavlo, Moscow)