Задачі 226 —231

Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горовий та Володимир Некрашевич

226. Знайти всі натуральні n та k, для яких $3^n + 7 = k^2$.

(О. Кукуш, Р. Ушаков, Київ)

227. Довести, що існує нескінченно багато функцій f, що визначені на множині натуральних чисел, приймають натуральні значення та задовольняють умову

$$f(nf(k) + kf(n)) = f(n^2 + k^2)f(n + k - 1)$$

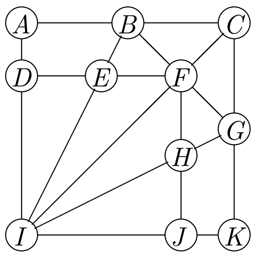
для всіх натуральних n та k.

(В. Брайман, Житомир, Д.Мітін, Київ)

228. В протилежних кутових клітинках поля розміром 2004×2004 стоять комбайни. Двоє гравців по черзі пересувають свої комбайни на одну з сусідніх клітинок (сусідніми є клітинки, що мають спільну сторону). Комбайн, що першим потрапляє у деяку клітинку, збирає там пшеницю. Виграє той з гравців, що збере пшеницю більше ніж з половини клітинок. Чи має хтось з гравців виграшну стратегію? Якщо має, то хто?

(О. Толесніков, Чернівці)

229. В кружечках на малюнку



слід замінити літери $A, B, C, \ldots, K$ числами від 1 до 11 так, щоб суми трьох чисел на кожному з десяти відрізків були однаковими. Скількома способами можна це зробити?

(О. Кукуш, М. Рожкова, Київ)

230. В трикутнику $\triangle ABC$ $3AC = AB + BC$. Нехай K — точка дотику вписаного в $\triangle ABC$ кола зі стороною AC, а L — діаметрально протилежна точка цього кола. Прямі AL та CL перетинають сторони BC та AB в точках A_1 та C_1 відповідно. Довести, що $AC_1 = CA_1$.

(А. Гоголев, Київ)

231. На честь дня святого Валентина n пар закоханих шахістів провели турніри юнаків та дівчат в одне коло, тобто кожні два юнаки та кожні дві дівчини зіграли між собою один раз. Виявилося, що жодна гра не закінчилась внічию, а кожна пара закоханих разом виграла по $n-1$ партії. Довести, що кількість трійок шахістів (A, B, C), в яких A виграв у B, B виграв у C та C виграв у A співпадає з кількістю трійок шахісток (D, E, F), в яких D виграла у E, E виграла у F та F виграла у D.

(О. Рибак, Київ)

226. Find all positive integers n and k such that $3^n + 7 = k^2$.

(O. Kukush, R. Ushakov, Kyiv)

227. Prove that there exists ininitely many functions f from $\mathbb{N}$ such that for every $n, k \in \mathbb{N}$ holds

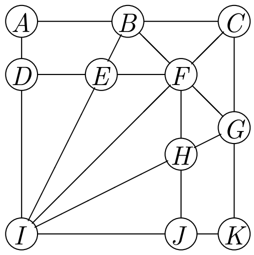
$$f(nf(k) + kf(n)) = f(n^2 + k^2)f(n + k - 1)$$

(V. Brayman, Zhytomyr, D. Mitin, Kyiv)

228. Two combines stands in the opposite corners of a 2004×2004 field. Two players move their combines alternately to one of the neighbour cell (two cells are said to be neighbour if they have a common side). The combine which has achieved some cell first collects wheat in it. The player who collects wheat from more than half of cells wins. Has somebody a winning strategy? If somebody has, then who?

(O. Tolesnikov, Chernivtsi)

229. Find the number of ways to replace letters $A, B, \ldots, K$ in the picture



with the numbers $1, 2, \ldots, 11$ if the sums of three numbers in each of ten rows have to be equal.

(O. Kukush, M. Rozhkova, Kyiv)

230. Let $\triangle ABC$ be a triangle such that $3AC = AB + BC$. The inscribed circle of $\triangle ABC$ touches the side AC at point K and KL is a diameter of the circle. The straight lines AL and CL intersect BC and AB at A_1 and C_1 respectively. Prove that $AC_1 = CA_1$.

(A. Gogolev, Kyiv)

231. In honour of Saint Valentines Day n loving couples of chess-players held tournaments of boys and girls, i.e. each two boys and each two girls played a single game. It is known that no game ended in draw and each couple of lovers won $n - 1$ games. Prove that the number of triples of boys (A, B, C) such that A beat B, B beat C and C beat A is equal to the number of triples of girls (D, E, F), such that D beat E, E beat F and F beat D.

(O. Rybak, Kyiv)