Задачі 214 —219

Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горовий та Володимир Некрашевич

214. Для кожного натурального числа k знайти всі натуральні числа n, для яких $7^n + 1$ ділиться на 5^k.

(О. Сарана, Житомир)

215. Нехай ABC — трикутник. Коло, яке проходить через A та B, перетинає відрізки AC та BC у точках D та E відповідно. Промені BA та ED перетинаються у точці F, а прямі BD та CF — у точці M. Довести, що $MF = MC$ тоді і тільки тоді, коли $MB \cdot MD = MC^2$.

(USA)

216. В центральній клітинці дошки розміром 2003×2003 стоїть фішка. Двоє гравців по черзі пересувають її на одну з сусідніх клітинок (сусідніми є клітинки, що мають спільну сторону). При цьому перший гравець або зберігає напрямок руху фішки, або повертає ліворуч, а другий гравець або зберігає напрямок руху, або повертає праворуч. Програє той, хто не може зробити хід. Хто з гравців має виграшну стратегію?

(О. Толесніков, Чернівці)

217. Нехай для кожного натурального n $\varphi(n)$ — функція Ойлера, визначена таким чином: $\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)$, де $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — всі попарно різні прості дільники n. Наприклад, $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = \varphi(4) = 2$. Знайти всі $n \le 1000$, для яких $\varphi(n) = \varphi(n+1)$.

(Ю. Шеляженко, Київ)

218. В опуклому вписаному чотирикутнику $ABCD$ бісектриси кутів $\angle BAD$ та $\angle BCD$ перетинаються на діагоналі BD. Нехай E — середина BD. Довести, що $\angle BAE = \angle CAD$.

(М. Курило, Липова Долина, Сумська обл.)

219. Обчислити границю послідовності

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2+2^2} + \ldots + \frac{1}{1^2+2^2+\ldots+n^2},\ n \ge 1.$$

(О. Кукуш, Р. Ушаков, Київ)

214. For every positive integer k find all such positive integers n that $7^n + 1$ is divisible by 5^k.

(O. Sarana, Zhytomyr)

215. Let ABC be a triangle. A circle passing through A and B intersects segments AC and BC at D and E, respectively. Rays BA and ED intersect at F while lines BD and CF intersect at M. Prove that $MF = MC$ if and only if $MB \cdot MD = MC^2$.

(USA)

216. A checker is placed in the central cell of a table of size 2003×2003. Two players move it alternately to one of the neighbour cells (two cells are said to be neighbour if they have a common side). First player is allowed to move the checker forward or to turn it left. Second player is allowed to move the checker forward or to turn it right. Player who can't move the checker lose. Who has a winning strategy?

(O. Tolesnikov, Chernivtsi)

217. For every positive integer n let $\varphi(n)$ be the Euler's function defined as follows: $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_m}\right)$, where $p_1, p_2, \dots, p_m$ are all pairwise distinct prime divisors of n. For example, $\varphi(1) = \varphi(2) = 1,\ \varphi(3) = \varphi(4) = 2$. Find all $n \le 1000$ such that $\varphi(n) = \varphi(n+1)$.

(Yu. Shelyazhenko, Kyiv)

218. Let $ABCD$ be a convex cyclic inscribed quadrilateral. Bisectors of the angles $\angle BAD$ and $\angle BCD$ intersect at the diagonal BD. Let E be the midpoint of BD. Prove that $\angle BAE = \angle CAD$.

(M. Kurylo, Lypova Dolyna, Sumska obl.)

219. Find the limit of the sequence

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2 + 2^2} + \dots + \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2},\ n \ge 1.$$

(O. Kukush, R. Ushakov, Kyiv)