Задачі 208 —213

Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горовий, Володимир Некрашевич та Дмитро Савчук

208. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \cos 2\alpha + 2\sin\beta\sin\gamma = -\frac{3}{2}, \\ \cos 2\beta + 2\sin\gamma\sin\alpha = -\frac{1}{2}, \\ \cos 2\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

(О. Сарана, Житомир)

209. Нехай $n \geq 2$ — натуральне число та A_n — кількість непорожніх підмножин S множини $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ з такою властивістю: середнє арифметичне елементів S є цілим числом. Довести, що $A_n - n$ завжди є парним.

(William Lowell Putnam Math. Competition)

210. Точка D лежить на стороні AB трикутника ABC. Позначимо через P та Q центри кіл, вписаних в $\triangle ACD$ та $\triangle BCD$. Знайти всі положення точки D, при яких трикутники PQD та ABC є подібними.

(Б. Рубльов, Київ)

211. На прямій дано набір з n відрізків, об'єднання яких є відрізком. Довести, що ці відрізки можна занумерувати $T_1, T_2, \ldots, T_n$ таким чином, що для будь-якої пари відрізків T_i, T_{i+1} знайдеться деякий відрізок T_k, що перетинається з T_i та T_{i+1} (не виключено, що $T_k = T_i$).

(І. Протасов, Київ)

212. Два кола ω_1 та ω_2 різних радіусів перетинаються в точках A та B. До них проведено дві спільні дотичні. Одна з них дотикається ω_1 та ω_2 в точках C та D, друга — в точках E та F відповідно. Точки H_1, H_2, H_3, H_4 — ортоцентри трикутників EFA, CDA, EFB, CDB відповідно. Довести, що $H_1H_2H_3H_4$ — прямокутник.

(М. Курило, Липова Долина, Сумська обл.)

213. Для довільних x, y з проміжку $[0, \frac{\pi}{2}]$ довести нерівність

$$\frac{\cos x \cos y - 4}{\cos x + \cos y - 4} \leq 1 + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x + y}{\cos x + \cos y - 4}\right).$$

(Д. Мітін, Київ)

208. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \cos 2\alpha + 2\sin\beta\sin\gamma = -\frac{3}{2}, \\ \cos 2\beta + 2\sin\gamma\sin\alpha = -\frac{1}{2}, \\ \cos 2\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

(O. Sarana, Zhytomyr)

208. Let $n \geq 2$ be an integer and A_n be the number of non-empty subsets S of $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ with the property that the average of the elements of S is an integer. Prove that $A_n - n$ is always even.

(William Lowell Putnam Math. Competition)

210. For any point D lying on the side AB of a triangle ABC denote by P and Q the centres of the circles inscribed into $\triangle ACD$ and $\triangle BCD$. Find all points D such that the triangle PQD is similar to the triangle ABC.

(B. Rublyov, Kyiv)

211. A collection of n segments is given on the straight line such that their union is a segment too. Prove that it is possible to number them $T_1, T_2, \ldots, T_n$ in such a way that for every pair of segments T_i, T_{i+1} there exists a segment T_k such that both intersections of T_k with T_i and T_{i+1} are not empty (it is possible that $T_k = T_i$).

(I. Protasov, Kyiv)

212. Two circles ω_1 and ω_2 of different radii intersect at points A and B. The straight line CD touches the circles ω_1 and ω_2 at points C and D as well as the straight line EF touches the circles ω_1 and ω_2 at points E and F respectively. Let H_1, H_2, H_3, H_4 be the intersection points of the altitudes of triangles EFA, CDA, EFB, CDB. Prove that $H_1H_2H_3H_4$ is a rectangular.

(M. Kurylo, Lypova Dolyna, Sumska obl.)

213. For any $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ prove the inequality

$$\frac{\cos x \cos y - 4}{\cos x + \cos y - 4} \leq 1 + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x+y}{\cos x + \cos y - 4}\right).$$

(D. Mitin, Kyiv)