Задачі 202 —207

Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горовий, Володимир Некрашевич та Дмитро Савчук

202. Для довільних $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$ довести нерівність

$$\frac{x_1^3}{y_1^2} + \frac{x_2^3}{y_2^2} + \ldots + \frac{x_n^3}{y_n^2} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^3}{(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)^2}$$

(А. Примак, Київ)

203. У клітинках шахівниці стоїть 0. За один крок дозволяється додати по одиниці до чисел, що стоять у двох клітинках, якщо від однієї до іншої можна перейти ходом коня. Чи можна за декілька кроків отримати шахівницю, на якій би зустрічалися всі числа від 1 до 64?

(В. Брайман, Житомир)

204. В опуклому п'ятикутнику $ABCDE$ $\angle ABC = \angle AED = 90^\circ$ та $AB \cdot ED = BC \cdot AE$. Нехай F — точка перетину CE та BD. Довести, що $AF \perp BE$.

(М. Курило, Липова Долина, Сумська обл.)

205. Довести, що існують 10 ірраціональних чисел, кожне з яких є коренем квадратного рівняння з цілими коефіцієнтами, таких, що при кожному $n \geq 1$ n-ті цифри після коми в десятковому записі цих чисел попарно різні.

(Ю. Шеляженко, Київ)

206. Діагоналі AC та BD опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці P. Кола, описані навколо трикутників ABP та DCP, перетинаються в точці M, відмінній від P, а кола, описані навколо трикутників BCP та ADP, перетинаються в точці N, відмінній від P. Серединні перпендикуляри до відрізків AC та BD перетинаються в точці O. Довести, що точки M, O, P, N лежать на одному колі.

(М. Курило, Липова Долина, Сумська обл.)

207. Знайти всі неперервні функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що для всіх дійсних x, y, z виконується рівність

$$f(x + f(y + f(z))) = f(x) + f(f(y)) + f(f(f(z))).$$

(О. Толесніков, Чернівці)

202. For every $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$ prove an inequality

$$\frac{x_1^3}{y_1^2} + \frac{x_2^3}{y_2^2} + \ldots + \frac{x_n^3}{y_n^2} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^3}{(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)^2}$$

(A. Prymak, Kyiv)

203. Each square of a chessboard contains 0. It is allowed to select any two squares connected by knight move and to increase numbers in them by 1. Is it possible to obtain the chessboard filled with integers $1, 2, \ldots, 64$?

(V. Brayman, Zhytomyr)

204. In the convex pentagon $ABCDE$ $\angle ABC = \angle AED = 90°$ and $AB \cdot ED = BC \cdot AE$. Let F be the intersection point of CE and BD. Prove that $AF \perp BE$.

(M. Kurylo, Lypova Dolyna, Sumska obl.)

205. Prove that there exist 10 irrational numbers such that each of them is a root of quadratic equation with integer coefficients and for every $n \geq 1$ their n-th digits after decimal point are pairwise distinct.

(Yu. Shelyazhenko, Kyiv)

206. The diagonals AC and BD of convex quadrilateral $ABCD$ intersect at the point P. The circles circumscribed around $\triangle ABP$ and $\triangle DCP$ intersect at the point M distinct from P. The circles circumscribed around $\triangle BCP$ and $\triangle ADP$ intersect at the point N distinct from P. Perpendiculars to AC and BD passing through the midpoints of AC and BD intersect at the point O. Prove that the points M, O, P, N lie on the same circle.

(M. Kurylo, Lypova Dolyna, Sumska obl.)

207. Find all continuous functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying the equality

$$f(x + f(y + f(z))) = f(x) + f(f(y)) + f(f(f(z)))$$

for all real x, y, z.

(O. Tolesnikov, Chernivtsi)