Задачі 196 —201

Розділ ведуть Володимир Брайман, Сергій Горовий, Володимир Некрашевич, Дмитро Савчук

196. Нехай a, b, c — довжини сторін довільного трикутника. Довести, що

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a}{c}(a+b-c) + \frac{c}{b}(c+a-b) + \frac{b}{a}(b+c-a)$$

(В. Гавран, Львів)

197. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 6, \\ 3x^2y - y^3 = 8. \end{cases}$$

(О. Макарчук, Добровеличківка, Кіровоградська обл.)

198. Назвемо натуральне число самоподільним, якщо воно ділиться на всі можливі суми своїх послідовних цифр, зокрема на кожну свою цифру. Довести, що множина самоподільних чисел є скінченною.

(В. Брайман, Житомир)

199. Довести, що при натуральних $n \geq 2, p \geq 3$ виконується нерівність

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^p}\right) > \frac{p}{p+1}.$$

(Р. Ушаков, Київ)

200. На площині вибрали $2n$ точок таким чином, що всі відстані між ними є різними. Для кожного $n \geq 1$ довести або спростувати наступне твердження: існують вибрані точки A та B такі, що по обидва боки від серединного перпендикуляра до AB лежать по n вибраних точок.

(А. Гоголєв, Київ)

201. Трикутник ABC вписаний в коло ω. Коло ω_1, яке дотикається кола ω внутрішнім чином, дотикається сторін AB та AC в точках M та N, а коло ω_2, що також дотикається кола ω внутрішнім чином, дотикається сторін AB та BC в точках P та K відповідно. Довести, що $NKMP$ паралелограм.

(М. Курило, Липова Долина, Сумська обл.)

196. Let a, b, c be the sides of triangle. Prove that

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a}{c}(a+b-c) + \frac{c}{b}(c+a-b) + \frac{b}{a}(b+c-a)$$

(V. Gavran, Lviv)

197. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 6, \\ 3x^2y - y^3 = 8. \end{cases}$$

(O. Makarchuk, Dobrovelychkivka, Kirovogradska obl.)

198. Call the positive integer selfdivisible if it is divisible by each sum of its consecutive digits, in particular it is divisible by each of its digits. Prove that the set of selfdivisible integers is finite.

(V. Brayman, Zhytomyr)

199. Prove that for any integers $n \geq 2, p \geq 3$ holds

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^p}\right) > \frac{p}{p+1}.$$

(R. Ushakov, Kyiv)

200. $2n$ points are chosen on the plane in such a way that all the distances between them are pairwise distinct. For every $n \geq 1$ prove or disprove the following statement: there exist selected points A and B such that exactly n selected points lie on each side of line which is perpendicular to the segment AB at its midpoint.

(A. Gogolev, Kyiv)

201. Triangle ABC is inscribed into the circle ω. The circle ω_1 touches the circle ω in an inner way and touches sides AB and AC in the points M and N. The circle ω_2 also touches the circle ω in an inner way and touches sides AB and BC in the points P and K respectively. Prove that $NKMP$ is a parallelogram.

(M. Kurylo, Lypova Dolyna, Sumska obl.)