# Задачі 190 — 195

*Розділ ведуть Володимир Брайман, Володимир Некрашевич та Дмитро Савчук*

190. Нехай $S = \{1, 2, \ldots, 2001, 2002\}$. Функція $f : S \to S$ визначається таким чином: $f(i) = i + 1$ для всіх $i = 1, 2, 3, \ldots, 998, 1000, 1001, \ldots, 2001$; $f(999) = 1$ та $f(2002) = 1000$. Довести, що можна означити функцію $g : S \to S$ так, що $g(g(n)) = f(n)$ для всіх $n$ із $S$.

*(В. Ясінський, Вінниця)*

191. Нехай $M$ — точка перетину медіан гострокутного трикутника $\triangle ABC$, $\angle BAC = 60^\circ$ та $\angle BMC = 120^\circ$. Довести, що $\triangle ABC$ рівносторонній.

*(В. Дума, Київ)*

192. Довести, що для всіх натуральних $n$ виконується нерівність

$$\sqrt{1 + \sqrt{3 + \sqrt{5 + \sqrt{\ldots + \sqrt{2n-1}}}}} < 2.$$

*(О. Кукуш, Р. Ушаков, Київ)*

193. Кола $\omega_1$ та $\omega_2$ з центрами $O_1, O_2$ та радіусами $R_1, R_2$ відповідно перетинаються в точках $A$ та $B$. Дотичні в точці $A$ до $\omega_2$ та $\omega_1$ перетинають кола $\omega_1$ та $\omega_2$ у точках $C$ та $D$ відповідно. На промені $AO_1$ відклали відрізок $AE = R_2$, а на промені $AO_2$ — відрізок $AF = R_1$. Нехай $M$ — середина $EF$. Довести, що $AM \perp CD$ та $CD \leq 4AM$.

*(М. Курило, Липова Долина, Сумська обл.)*

194. Позначимо $S(n)$ суму цифр десяткового запису числа $n$. Довести, що в послідовностях $\{S(2^n), n \geq 1\}$ та $\{S(n!), n \geq 1\}$ жодне значення не зустрічається нескінченну кількість разів.

*(Ю.Шеляженко, Київ)*

195. У гострокутному трикутнику $\triangle ABC$ проведені висоти $AA_1, BB_1, CC_1$. Довести, що для довільної точки $X$ виконується нерівність

$$XA_1^2 \cdot \sin 2A + XB_1^2 \cdot \sin 2B + XC_1^2 \cdot \sin 2C \geq R^2 \sin 2A \sin 2B \sin 2C,$$

де $R$ — радіус кола, описаного навколо трикутника $\triangle ABC$.

*(М. Курило, Липова Долина, Сумська обл.)*

190. Let $S = \{1, 2, \ldots, 2001, 2002\}$. Function $f : S \to S$ is defined as follows: $f(i) = i + 1$ for $i = 1, 2, 3, \ldots, 998, 1000, 1001, \ldots, 2001$; $f(999) = 1$ and $f(2002) = 1000$. Prove that there exists a function $g : S \to S$ such that $g(g(n)) = f(n)$ for all $n$ from $S$.

*(V. Yasinskyy, Vinnytsa)*

191. Let $M$ be the intersection point of medians in the acute-angled triangle $\triangle ABC$, $\angle BAC = 60°$ and $\angle BMC = 120°$. Prove that $\triangle ABC$ is equilateral triangle.

*(V. Duma, Kyiv)*

192. For every positive integer $n$ prove the inequality for all $n \geq 1$

$$\sqrt{1 + \sqrt{3 + \sqrt{5 + \sqrt{\ldots + \sqrt{2n-1}}}}} < 2.$$

*(O. Kukush, R. Ushakov, Kyiv)*

193. The circles $\omega_1$ and $\omega_2$ with centres $O_1, O_2$ and radii $R_1, R_2$ respectively intersect at the points $A$ and $B$. Tangent lines to $\omega_2$ and $\omega_1$ passing through $A$ intersect $\omega_1$ and $\omega_2$ in the points $C$ and $D$ respectively. Let $E$ and $F$ be the points on the rays $AO_1$ and $AO_2$ such that $AE = R_2$ and $AF = R_1$. Let $M$ be the midpoint of $EF$. Prove that $AM \perp CD$ and $CD \leq 4AM$.

*(M. Kurylo, Lypova Dolyna, Sumska obl.)*

194. Denote by $S(n)$ the sum of decimal digits of $n$. Prove that there doesn't exist any number such that it appears in the sequences $\{S(2^n), n \geq 1\}$ and $\{S(n!), n \geq 1\}$ infinitely many times.

*(Yu.Shelyazhenko, Kyiv)*

195. Let $AA_1, BB_1, CC_1$ be the altitudes of the acute-angled triangle $\triangle ABC$. Prove for every point $X$ the inequality

$$XA_1^2 \cdot \sin 2A + XB_1^2 \cdot \sin 2B + XC_1^2 \cdot \sin 2C \geq R^2 \sin 2A \sin 2B \sin 2C,$$

where $R$ is the radius of the circle circumscribed around $\triangle ABC$.

*(M. Kurylo, Lypova Dolyna, Sumska obl.)*