Задачі 184 — 189

Розділ ведуть Володимир Брайман, Володимир Некрашевич та Дмитро Савчук

184. Для $0 \leq a, b, c < \frac{1}{\sqrt{3}}$ довести нерівність

$$\frac{a+b}{1-ab} + \frac{b+c}{1-bc} + \frac{a+c}{1-ac} \leq 2\frac{a+b+c-abc}{1-ab-bc-ac}.$$

(В. Брайман, Житомир.)

185. Впорядковану трійку чисел (x, y, z), де $x > 0$, $z > 0$, дозволяється замінити однією з двох трійок: $(x, y-z, zx^z)$ або $(z^y, \frac{1}{y}, x^y)$ (при $y \neq 0$). Знайти всі пари чисел (a, b), де $a \neq b$, $a \geq 3$, $b \geq 3$, для яких знайдеться таке $c > 0$, що з трійки (a, b, c) за скінченну кількість кроків можна отримати трійку (b, a, c).

(Д. Мітін, Київ)

186. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 — висоти гострокутного трикутника $\triangle ABC$, AA_2, BB_2, CC_2 — його медіани, які перетинають B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 в точках A_3, B_3 та C_3 відповідно. Довести, що прямі A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 перетинаються в одній точці.

(М. Курило, Липова Долина ,Сумська обл.)

187. Побудувати трикутник ABC, якщо відомі описане коло ω, точка D на стороні AB, пряма l, паралельна AC, та довжина сторони BC.

(В. Дума, Київ)

188. Множину цілих чисел довільним чином пофарбовано в k кольорів. Довести, що для деякого з цих кольорів існують числа $c_1, c_2, \ldots, c_k$ такі, що кожне ціле число можна подати у вигляді $a - b + c$, де a, b — деякі числа вибраного кольору, а c — одне з чисел $c_1, \ldots, c_k$.

(І. Протасов, Київ.)

189. В трикутнику ABC AM та AN — медіана та бісектриса, проведені з вершини A. Нехай перпендикуляр, проведений в точці N до NA, перетинає MA та BA в точках Q та P відповідно, а перпендикуляр, проведений в точці P до BA, перетинає продовження AN в точці O. Довести, що прямі QO та BC перпендикулярні.

(Asian Pacific Mathematics Olympiad)

184. For every $0 \leq a, b, c < \frac{1}{\sqrt{3}}$ prove the inequality

$$\frac{a+b}{1-ab} + \frac{b+c}{1-bc} + \frac{a+c}{1-ac} \leq 2\frac{a+b+c-abc}{1-ab-bc-ac}.$$

(V. Brayman, Zhytomyr.)

185. The ordered triple of numbers (x, y, z) with $x > 0$, $z > 0$ may be replaced by either $(x, y - z, zx^z)$ or $(z^y, \frac{1}{y}, x^y)$ (if $y \neq 0$). Find all pairs (a, b) with $a \neq b$, $a \geq 3$, $b \geq 3$ for which there exists such $c > 0$ that one can obtain (b, a, c) from (a, b, c) in finite number of replacemens.

(D. Mitin, Kyiv)

186. Let AA_1, BB_1 and CC_1 be the altitudes of the acute triangle ABC.Let AA_2, BB_2, CC_2be its medians which intersect B_1C_1, A_1C_1 and A_1B_1 in the points A_1, B_3, C_3 correspondingly. Prove that the straight lines A_1A_3, B_1B_3 and C_1C_3 intersect in a common point.

(M. Kurylo, Lypova Dolyna, Sumska obl.)

187. Construct a triangle ABC if known are the circle ω, circumscribed around $\triangle ABC$, a point D on AB, line l parallel to AC and the length of BC.

(V. Duma, Kyiv)

188. The set of integers is painted by k colours in arbitrary way. Prove that for some of this colours there exists integers $c_1, c_2, \dots, c_k$ such that it is possible to represent every integer in the form $a - b + c$, where a, b are some integers of selected colour and c is one of the numbers $c_1, \dots, c_k$.

(I. Protasov, Kyiv.)

189. Let ABC be a triangle. Let M and N be the points in which the median and the angle bisector, respectively, at A meet the side BC. Let Q and P be the points in which the perpendicular at N to NA meets MA and BA, respectively, and O the point in which the perpendicular at P to BA meets AN produced. Prove that QO is perpendicular to BC.

(Asian Pacific Mathematics Olympiad)