Задачі 178 — 183

Розділ ведуть Володимир Брайман, Володимир Некрашевич та Дмитро Савчук

178. Нехай ABC — гострокутний трикутник, ω — коло, описане навколо $\triangle ABC$, M_1, M_2, M_3 — середини сторін BC, AB, AC відповідно. Висоти, проведені з вершин A та C до BC та AB, перетинають коло ω в точках L_1 та L_2, P_3 — ортоцентр трикутника $\triangle BM_1M_2$. Доведіть, що прямі M_3P_3 та L_1L_2 перпендикулярні.

(О. Чубенко, Прилуки, Чернігівська обл.)

179. Довести, що для додатних чисел a, b, c, x, y, z має місце нерівність

$$\sqrt[3]{a(b+1)yz} + \sqrt[3]{b(c+1)zx} + \sqrt[3]{c(a+1)xy} \le$$
$$\le \sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)(x+1)(y+1)(z+1)}.$$

(М. Курило, Липова долина, Сумська обл.)

180. За круглим столом сидять N соціологів. Деякі з них завжди говорять правду, а інші завжди брешуть. Під час першого раунду опитування кожен соціолог питає сусіда зліва чи $2+2=4$, а під час кожного наступного раунду питає, чи отримав той відповідь "так"в попередньому раунді. Яка найбільша можлива кількість відповідей "ні"могла з'явитись в перших N раундах опитування ?

(В. Брайман, Житомир.)

181. Нехай M та M_1 — точки перетину медіан трикутників $\triangle ABC$ та $\triangle A_1B_1C_1$,

$$\angle ACM = \angle A_1C_1M_1, \quad \angle MBC = \angle M_1B_1C_1.$$

Чи можуть $\triangle ABC$ та $\triangle A_1B_1C_1$ не бути подібними ?

(В. Дума, Київ.)

182. Доведіть, що існує єдина функція f з множини $\mathbb{R}^+$ додатних дійсних чисел в $\mathbb{R}^+$ така, що

$$f(f(x)) = 6x - f(x).$$

(William Lowell Putnam Math. Competition.)

183. Археологи виявили піраміду у формі правильного тетраедра, складену з дев'яти монолітних блоків. Вони встановили, що для виготовлення блоків було використано дев'ять однакових кам'яних брил у формі правильних тетраедрів, з кожної з яких витесали по одному блоку. Доведіть, що відходи древніх будівельників перевищили 11%.

(І. Федак , Івано-Франківськ.)

178. Let ABC be acute-angled triangle, let ω be the circle circumscribed around $\triangle ABC$, let M_1, M_2, M_3 be the midpoints of BC, AB and AC correspondingly. The altitudes from A and C to BC and AB intersect ω in the points L_1 and L_2. P_3 is the intersection point of the altitudes of the triangle BM_1M_2. Prove that the straight lines M_3P_3 and L_1L_2 are perpendicular.

(O. Chubenko, Pryluky, Chernigivska obl.)

179. For every positive numbers a, b, c, x, y, z prove the inequality

$$\sqrt[3]{a(b+1)yz} + \sqrt[3]{b(c+1)zx} + \sqrt[3]{c(a+1)xy} \leq$$
$$\leq \sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)(x+1)(y+1)(z+1)}.$$

(M. Kurylo, Lypova Dolyna, Sumska obl.)

180. N sociologists are sitting at the round table. Some of them always tell the truth and the others always lie. During the first round of interrogation each sociologist asks his left neighbour whether $2+2=4$ and during every next round he asks if his left neighbour received a "yes"answer during the preceding round. Find the maximal number of "no"answers which is possible to occur during the first N rounds of interrogation.

(V. Brayman, Zhytomyr.)

181. Let M and M_1 be the intersection points of medians in the triangles $\triangle ABC$ and $\triangle A_1B_1C_1$,

$$\angle ACM = \angle A_1C_1M_1, \quad \angle MBC = \angle M_1B_1C_1.$$

Is it possible for $\triangle ABC$ and $\triangle A_1B_1C_1$ not to be similar?

(V. Duma, Kyiv.)

182. Prove that there exist a unique function f from the set $\mathbb{R}^+$ of positive real numbers to $\mathbb{R}^+$ such that

$$f(f(x)) = 6x - f(x).$$

(William Lowell Putnam Math. Competition.)

183. Archeologists found a pyramid which has a regular tetrahedron shape and was formed by nine monolithic blocks. They found out that nine identical regular tetrahedron-shaped stony boulders were used to make blocks and each block was made from another boulder. Prove that the waste of ancient builders exceeded 11%.

(I. Fedak, Ivano-Frankivsk.)