Задачі 172 — 177

Розділ ведуть Володимир Брайман, Володимир Некрашевич та Дмитро Савчук

172. Нехай $a_1, a_2, \dots a_n$ — додатні числа та $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Доведіть, що існує такий номер $1 \le k \le n$, що $a_k a_{k+1}^2 (a_{k+1}^3 + 2) \ge 3$ (тут $a_{n+1} = a_1$).

(В. Ясінський, Вінниця)

173. Трикутник ABC вписано в коло. Точки C та M лежать на різних дугах з кінцями A та B. Хорди MK та MP перетинають сторони AC та BC відповідно в точках H та N. Хорди AP та BK перетинаються в точці I. Довести, що точки H, I, N лежать на одній прямій.

(І. Нагель, Євпаторія)

174. Нехай $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\dots$ — нескінченна послідовність многочленів з дійсними коефіцієнтами. Довести, що існує число m та послідовність многочленів $F_1(y_1, \dots, y_m)$, $F_2(y_1, \dots, y_m)$, $\dots$ такі, що для кожного $i > 0$

$$f_{m+i}(x) = F_i(f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

(І. Аржанцев, Гренобль)

175. Нехай a — таке дійсне число, що рівняння

$$\left(\frac{x-1000}{(x-1001)^2} - \frac{x-1001}{(x-1000)^2} \right)^{2001} = a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2001} \right)^{2000}$$

має своїм найбільшим коренем число 2002. Знайти найменший корінь цього рівняння.

(В. Ясінський, Вінниця)

176. Чи можна за допомогою довгого прямого ножа розрізати торт прямокутної форми на три рівновеликі частини?

(О. Толесніков, Чернівці)

177. Кожне ціле число пофарбували в білий чи чорний колір. Довести, що для одного з цих кольорів кожне парне число можна подати у вигляді $a + b - c - d$, де a, b, c, d мають цей колір.

(В. Брайман, Житомир, І. Протасов, Київ)

172. Let $a_1, a_2, \ldots a_n$ be positive numbers and $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Prove that there exists such a number $1 \leq k \leq n$ that $a_k a_{k+1}^2 (a_{k+1}^3 + 2) \geq 3$ (where $a_{n+1} = a_1$).

(V. Yasinsky, Vinnytsya)

173. Let triangle ABC be inscribed into a circle. Points C and M lie on different arcs of the circle with endpoints A and B. Chords MK and MP intersect AC and BC in the points H and N respectively. Chords AP and BK intersects in the point I. Prove that points H, I and N lies on the same straight line.

(I. Nagel, Evpatoria)

174. Let $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$ be an infinite sequence of polynomials with real coefficients. Prove that there exist an integer m and a sequence of polynomials $F_1(y_1, \ldots, y_m)$, $F_2(y_1, \ldots, y_m)$, $\ldots$ such that for every $i > 0$

$$f_{m+i}(x) = F_i(f_1(x), \ldots, f_m(x)).$$

(I. Arzhantsev, Grenoble)

175. Let a be such real number that equation

$$\left(\frac{x-1000}{(x-1001)^2} - \frac{x-1001}{(x-1000)^2}\right)^{2001} = a\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2001}\right)^{2000}$$

has the largest root 2002. Find the smallest root of this equation.

(V. Yasinsky, Vinnytsya)

176. Is it possible to cut a rectangular-shaped cake into three parts of equal area having a long straight knife?

(O. Tolesnikov, Chernivtsi)

177. Every integer is painted into black or white. Prove that for some of this colours it is possible to represent every even integer in the form $a + b - c - d$, where a, b, c, d have this colour.

(V. Brayman, Zhytomyr, I. Protasov, Kyiv)