Задачі 166 — 171

Розділ ведуть Володимир Брайман, Володимир Некрашевич та Дмитро Савчук

166. Нехай a, b, c — додатні дійсні числа. Довести, що має місце нерівність

$$\frac{a^6}{b^2+c^2}+\frac{b^6}{a^2+c^2}+\frac{c^6}{a^2+b^2} \geq \frac{abc(a+b+c)}{2}.$$

(М. Курило, Липова Долина, Сумська обл.)

167. Розв'язати рівняння

$$(\overline{xy})^2+(x+y)^2+\left[\frac{x}{y}\right]=2001, \text{ де } x, y \text{ — цифри.}$$

(О. Наровлянський, Чернігів.)

168. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 — бісектриси трикутника ABC, проведені до сторін BC, AC та AB відповідно; G_1, G_2, G_3 — точки перетину медіан трикутників AB_1C_1, BA_1C_1 та CA_1B_1 відповідно. Довести, що прямі AG_1, BG_1, CG_1 перетинаються в одній точці.

(М. Курило, Липова Долина, Сумська обл.)

169. У квадраті зі стороною 1 розміщено m^2 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Довести, що існує трикутник з вершинами в цих точках, площа якого не перевищує $\frac{1}{2(m-1)^2}$.

(С. Лінчук, Ю. Лінчук, Чернівці.)

170. В трикутник ABC вписане коло радіуса r, що дотикається до сторін AB, BC, AC в точках N, Y, H відповідно. Позначимо відстані від точок N, Y та H до сторін BC, AC і AB відповідно через d_N, d_Y та d_H. Доведіть, що

$$\frac{\sqrt{d_H}}{\sqrt{d_Y}+\sqrt{d_N}}\left(\frac{1}{d_Y}+\frac{1}{d_N}\right)+\frac{\sqrt{d_N}}{\sqrt{d_Y}+\sqrt{d_H}}\left(\frac{1}{d_Y}+\frac{1}{d_H}\right)+\frac{\sqrt{d_Y}}{\sqrt{d_N}+\sqrt{d_H}}\left(\frac{1}{d_N}+\frac{1}{d_H}\right) \geq \frac{2}{r}.$$

(І. Нагель, Євпаторія.)

171. На заводі працює 2001 робітник. По підсумках роботи складено два списки робітників: список D, складений директором, та список W, складений працівниками. Премія для робітника, який стоїть на n-му місці в списку D та на m-му місці в списку W, нараховується за формулою $f(n, m) = m \cdot 2001^n + m^{2000} + n^{2000}$. Чи можна, маючи лише список D та суму S премій для всіх робітників, правильно виплатити премію кожному робітникові?

(І. Бобак, Луцьк.)

166. Let a, b, c be positive real numbers. Prove the inequality

$$\frac{a^6}{b^2+c^2}+\frac{b^6}{a^2+c^2}+\frac{c^6}{a^2+b^2} \geq \frac{abc(a+b+c)}{2}.$$

(M. Kurylo, Lypova Dolyna, Sumska obl.)

167. Solve the equation

$$(\overline{xy})^2+(x+y)^2+\left[\frac{x}{y}\right]=2001, \text{ where } x, y \text{ are digits.}$$

(O. Narovlyansky, Chernigiv.)

168. Let AA_1, BB_1, CC_1 be bisectors in the triangle ABC, let G_1, G_2, G_3 be the intersection points of medians in the triangles AB_1C_1, BA_1C_1 and CA_1B_1 respectively. Prove that the straight lines AG_1, BG_1, CG_1 intersect in a common point.

(M. Kurylo, Lypova Dolyna, Sumska obl.)

169. In the square with unit side m^2 points are located so that no three points lie on one line. Prove that there exists a triangle with the vertices in these points of area not greater than $\frac{1}{2(m-1)^2}$.

(S. Linchuk, Yu. Linchuk, Chernivtsi.)

170. Triangle ABC is circumscribed around a circle of radius r. The circle is tangent to the sides AB, BC, AC in the points N, Y, H respectively. Denote the distances from the points N, Y and H to the sides BC, AC and AB by d_N, d_Y and d_H respectively. Prove that

$$\frac{\sqrt{d_H}}{\sqrt{d_Y}+\sqrt{d_N}}\left(\frac{1}{d_Y}+\frac{1}{d_N}\right)+\frac{\sqrt{d_N}}{\sqrt{d_Y}+\sqrt{d_H}}\left(\frac{1}{d_Y}+\frac{1}{d_H}\right)+\frac{\sqrt{d_Y}}{\sqrt{d_N}+\sqrt{d_H}}\left(\frac{1}{d_N}+\frac{1}{d_H}\right) \geq \frac{2}{r}.$$

(I. Nagel, Evpatoria.)

171. There are 2001 workers at a factory. Due to results of work there were made two rating lists of the workers. A list D is composed by the director and a list W is composed by the workers. The prize $f(n, m)$ for a worker positioned on the n-th place in the list D and on the m-th place in the list W is calculated by the formula $f(n, m) = m \cdot 2001^n + m^{2000} + n^{2000}$. Suppose we have only the list D and the sum S of all the prizes. Is it possible to pay the prizes for all the workers correctly?

(I. Bobak, Lutsk.)

Розв'язання задач 118 — 123

Розділ ведуть Володимир Брайман, Володимир Некрашевич та Дмитро Савчук

118. Розв'язати рівняння

$$xy + 2x = \sqrt{2x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + 2y^2 - 4y + 4}.$$

Розв'язок. Запишемо рівняння у вигляді

$$xy + yx + x(2 - y) = \sqrt{2x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + 2y^2 - 4y + 4}.$$

Позначимо $\vec{a} = (x, y, x)$, $\vec{b} = (y, x, 2 - y)$. Тоді наше рівняння переписується у вигляді $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. А оскільки $\vec{b} \neq \vec{0}$, то це рівносильно умові $\vec{a} = k\vec{b}$ для деякого $k \geq 0$. Тоді $x = ky$, $y = kx$, $x = k(2 - y)$. Звідки $y = k^2 y$, тобто $y(1 - k^2) = 0$. Звідки або $y = 0$, і тоді $x = 0, k = 0$, або ж $k = 1$, і тоді $x = y, x = 2 - y$, $x = y = 1$.

Відповідь: $x = y = 0$; $x = y = 1$.

(Розв'язок автора)

119. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що для всіх дійсних x, y виконується рівність

$$f(y) + f(x + f(y)) = y + f(f(x) + f(f(y))).$$

Розв'язок. Нехай f — функція, що задовольняє умову. При $x = y = 0$ маємо $f(0) + f(f(0)) = f(f(0) + f(f(0)))$, тобто для $\lambda = f(0) + f(f(0))$ виконується $f(\lambda) = \lambda$. Нехай тепер $t \in \mathbb{R}$. При $x = f(t)$ і $y = \lambda$ маємо $f(\lambda) + f(f(t) + f(\lambda)) = \lambda + f(f(f(t)) + f(f(\lambda)))$, тобто

$$f(t) + f(\lambda + f(t)) = f(f(f(t)) + \lambda) \tag{1}$$

Підставимо тепер в початкове рівняння $x = \lambda$ і $y = t$. Тоді $f(t)+f(\lambda+f(t)) = t+f(\lambda+f(f(t)))$, звідки, враховуючи рівняння (1), отримуємо $f(t) = t$ для всіх дійсних t.

Легко перевірити, що функція $f(x) = x$ задовольняє умову задачі.

Відповідь: $f(x) = x$.

(Розв'язок автора)

120. Довести, що для кожного натурального n виконана нерівність

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} \sin\frac{k\pi}{n}}{n+1} < \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{(2k+1)}{2n}\pi}{n}$$

Розв'язок. При $n = 1$ нерівність очевидна. Нехай $n \geq 2$.

Оскільки для $k = 0, 1, \ldots, n-1$ виконується нерівність $\frac{1}{2}\left(\sin\frac{k\pi}{n} + \sin\frac{(k+1)\pi}{n}\right) = \sin\frac{(2k+1)}{2n}\pi \cdot \cos\frac{\pi}{2n} \leq \sin\frac{(2k+1)}{2n}\pi$, то додаючи ці нерівності отримаємо

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{(2k+1)}{2n}\pi \geq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\sin\frac{k\pi}{n} + \sin\frac{(k+1)\pi}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{k\pi}{n} - \frac{1}{2}\left(\sin\frac{0\cdot\pi}{n} + \sin\frac{n\cdot\pi}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{k\pi}{n} > \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

А остання нерівність вірна, бо $\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{k\pi}{n} > 0$ при $n \geq 2$.

121. Знайти кути опуклого вписаного чотирикутника, якщо відомо, що кожна його діагональ є бісектрисою одного кута, і трисектрисою протилежного.

Розв'язок. Нехай в чотирикутнику $ABCD$ AC — бісектриса $\angle A$ і трисектриса $\angle C$, BD — бісектриса $\angle D$ і трисектриса $\angle B$. Тоді $\overset{\smile}{BC}=\overset{\smile}{CD}$, $\overset{\smile}{AB}=\overset{\smile}{BC}$, отже $\overset{\smile}{AB}=\overset{\smile}{BC}=\overset{\smile}{CD}= x$. Оскільки $\angle ABD = \frac{1}{2}\angle DBC$ або $\angle ABD = 2\angle DBC$, то $\overset{\smile}{AD}= \frac{x}{2}$ або $\overset{\smile}{AD}= 2x$. Розглянемо ці випадки.

а) Якщо $\overset{\frown}{AD}=\frac{x}{2}$, то $360^\circ = x+x+x+\frac{x}{2}$, звідки $x=\frac{720^\circ}{7}$ та $\angle A=\angle D=\frac{720^\circ}{7}$, $\angle B=\angle C=\frac{540^\circ}{7}$.

б) Якщо $\overset{\frown}{AD}=2x$, то $360^\circ = x+x+x+2x$, звідки $x=72^\circ$ та $\angle A=\angle D=72^\circ$,$\angle B=\angle C=108^\circ$.

Відповідь: $\frac{720^\circ}{7},\frac{720^\circ}{7},\frac{540^\circ}{7},\frac{540^\circ}{7}$ або $72^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 108^\circ$.

(Розв'язок автора)

122. В грі "n в ряд"два гравці по черзі відмічають точки тривимірного простору з цілими координатами. Перший гравець відмічає хрестиками, а другий нуликами. Перший гравець виграє, якщо з'являється n хрестиків які розташовані в ряд, тобто n відмічених хрестиками різних точок вигляду $(x,y,z),(x+a,y+b,z+c),(x+2a,y+2b,z+2c),\ldots,(x+(n-1)a,y+(n-1)b,z+(n-1)c)$, де кожне з чисел a,b,c може бути рівним лише $0, 1$, або -1.

Довести, що для деякого n другий гравець може грати так, що як би не грав перший, він ніколи не виграє.

Розв'язок. Візьмемо $n=39$. Легко бачити, що ряди можна утворювати в 13 напрямках, які ми позначимо через $\pm(a_1,b_1,c_1),\ldots,\pm(a_{13},b_{13},c_{13})$. Нехай A_j — множина точок (x,y,z), для яких $x+y+z-j$ ділиться на 13, $j=1,2,\ldots,13$. Зрозуміло, що множини A_j не перетинаються та їх об'єднання дає множину всіх точок тривимірного простору із цілими координатами. Розіб'ємо кожну з множин A_j на пари точок вигляду $(x,y,z),(x+13a_j,y+13b_j,z+13c_j)$. Тоді в будь-якому ряді довжини $n=39$, що утворюється в напрямку $\pm(a_j,b_j,c_j)$, знайдуться точки з A_j, що складають пару. Тепер при $n=39$ другому гравцю для досягнення його мети достатньо відмічати точки, які складають пари з тими точками, що відмітив перший гравець.

123. Діагоналлю многогранника називають відрізок, що сполучає дві його вершини і не є ребром чи діагоналлю грані. Скільки вершин може мати опуклий многогранник, в якого є принаймні дві діагоналі і всі вони рівні між собою?

Розв'язок. Єдиний многогранник, у якого 4 вершини, це тетраедр. Але у нього немає діагоналей.

Нехай у шуканого многогранника 5 вершин. Тоді можливо два випадки. Або існує 4 вершини, що лежать в одній площині, тоді цей многогранник — чотирикутна піраміда, у якої нема діагоналей взагалі. Або ж якщо таких вершин не існує, то цей многогранник складається з двох трикутних пірамід, склеєних по спільній грані, а у такого многогранника є лише одна діагональ.

Доведемо тепер, що для кожного натурального $n\geq 6$ існує потрібний многогранник з n вершинами. Дійсно, розглянемо чотири точки A,B,O_1,O_2, які є вершинами ромба AO_1BO_2. На дузі $\overset{\frown}{AB}$ з центром O_1 послідовно відмічаємо k точок $P_1,P_2,\ldots,P_k$. Нехай $Q_1,Q_2,\ldots,Q_k$ — точки, які симетричні до точок $P_1,P_2,\ldots,P_k$ відповідно відносно прямої AB (вони лежатимуть на дузі $\overset{\frown}{AB}$ з центром O_2). Крім цього, розглянемо ще дві точки C і D, які проектуються відповідно в точки O_1 і O_2, знаходяться на однаковій відстані від площини ромба AO_1BO_2 та лежать по один бік від неї. Розглянемо многогранник з вершинами в цих усіх точках (його ребрами є відрізки CD, CA, $CQ_1,\ldots,CQ_k$, CB, DB, $DP_1,\ldots,DP_k$, DA, AP_1, $P_1P_2,\ldots,P_kB$, $BQ_k,\ldots,Q_2Q_1$, Q_1A). У цього многогранника $n=2k+4$ — парне число вершин, причому $n\geq 6$, і довжини всіх його діагоналей дорівнюють $\sqrt{R^2+d^2}$, де R — сторона ромба AO_1BO_2, d — відстань від точок C і D до площини ромба. Якщо від цього многогранника відітнути чотирикутну піраміду AP_1Q_1CD (це можна зробити, бо $P_1Q_1 \parallel CD$), то одержимо многогранник з $n=2k+3$, $k\geq 2$ — непарним числом вершин, який задовольняє умовам задачі.

(Розв'язок автора)

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Чубенко О. (Прилуки, Чернігівська обл.) 117(125);

Петровський Д. (Житомир) 117(125), 118, 119;
Крюкова Г. (Прилуки, Чернігівська обл.) 118, 120, 121;
Петручек В. (Запоріжжя) 117(125), 118, 120;
Степанов Т. (Донецьк) 121;
Соловйов Ю. (Луганськ) 117(125).