Задачі 154 —159

Розділ ведуть Володимир Мазорчук та Володимир Некрашевич

154. Нехай $ABCD$ — трапеція ($BC \parallel AD$), E — точка перетину її діагоналей, O — центр кола, описаного навколо $\triangle AOD$. K та L — основи перпендикулярів, опущених з точок B і C на AC і BD відповідно. Доведіть, що $KL \perp OE$.

(А. Примак, Київ)

155. Послідовність $\{a_n,\, n \geq 1\}$ визначається наступним чином:

$$a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + (a_{n-1} \mod n)^2,\ n \geq 2,$$

де $a \mod b$ позначає остачу при діленні a на b. Яке найбільша кількість послідовних членів цієї послідовності можуть збігатися?

(В. Мазорчук, Київ)

156. У Імперії деякі міста з'єднано авіаційними рейсами. При цьому для кожних трьох міст Імперії з будь-якого можна перелетіти в будь-яке (можливо з пересадками) не пролітаючи через третє місто. Всього в Імперії 2000 міст. Довести, що міста можна розділити між двома спадкоємцями Імператора так, що міст у кожного спадкоємця буде порівну та будь-які два міста, що належать одному спадкоємцеві сполучені маршрутом, що проходить лише через міста цього спадкоємця.

(В. Ясінський, Вінниця)

157. В трикутнику $\triangle ABC$ точки A_1, B_1, C_1 — середини сторін BC, AC, AB відповідно. Нехай H_1, H_2, H_3 — ортоцентри трикутників $\triangle AB_1C_1, \triangle BA_1C_1, \triangle CA_1B_1$. Довести, що прямі A_1H_1, B_1H_2, C_1H_3 перетинаються в одній точці.

(М. Курило, Липова Долина, Сумська обл.)

158. Довести, що для будь-яких трьох чисел α, β, γ з інтервалу $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ виконується нерівність

$$\alpha + \beta + \gamma \geq \alpha \cdot \frac{\sin\beta + \sin\gamma}{2\sin\alpha} + \beta \cdot \frac{\sin\gamma + \sin\alpha}{2\sin\beta} + \gamma \cdot \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2\sin\gamma}.$$

(В. Ясінський, Вінниця)

159. Знайти всі четвірки (x, y, z, p) натуральних чисел такі, що $x > 2$, p — просте і $x^y = p^z + 1$.

(А. Примак, О. Манзюк, Київ)

154. Let $ABCD$ be a trapezoid ($BC \parallel AD$), denote by E the intersection point of its diagonals and by O the center of the circle circumscribed around the triangle $\triangle AOD$. Let K and L the points on the segments AC and BD respectively such that $BK \perp AC$ and $CL \perp BD$. Prove that $KL \perp OE$.

(A. Prymak, Kyiv)

155. The sequence $\{a_n,\, n \geq 1\}$ is defined in the following way:

$$a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + (a_{n-1} \mod n)^2,\ n \geq 2,$$

where $a \mod b$ denotes the remainder of division of a by b. What is the maximal possible number of consecutive equal members of this sequence?

(V. Mazorchuk, Kyiv)

156. Some cities of the Empire are connected by air lines. It is known that for any three cities there exists a route connecting any two of them and not passing through the third one. The Empire has 2000 cities. Prove that one can divide the cities between two descendants of the Emperor so that the descendants get equal number of the cities and any two cities belonging to one descendant are connected by a route passing only through his cities.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

157. Let A_1, B_1, C_1 be the midpoints of the segments BC, AC, AB of the triangle $\triangle ABC$ respectively. Let H_1, H_2, H_3 be the intersection points of the altitudes of the triangles $\triangle AB_1C_1$, $\triangle BA_1C_1$, $\triangle CA_1B_1$. Prove that the lines A_1H_1, B_1H_2, C_1H_3 are concurrent.

(M. Kurylo, Lypova Dolyna, Sumska obl.)

158. Let the numbers α, β, γ belong to the interval $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Prove the inequality

$$\alpha + \beta + \gamma \geq \alpha \cdot \frac{\sin\beta + \sin\gamma}{2\sin\alpha} + \beta \cdot \frac{\sin\gamma + \sin\alpha}{2\sin\beta} + \gamma \cdot \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2\sin\gamma}.$$

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

159. Find all the quadruples (x, y, z, p) of positive integers such that $x > 2$, the number p is prime and $x^y = p^z + 1$.

(A. Prymak, O. Manziuk, Kyiv)