Задачі 148 —153

Розділ ведуть Володимир Мазорчук та Володимир Некрашевич

148. Для кожного натурального числа n, що не є повним кубом, довести нерівність

$$\{\sqrt[3]{n}\} > \frac{1}{3\sqrt[3]{n^2}}.$$

Тут $\{x\}$ — дробова частина числа x, тобто $\{x\} = x - [x]$, де $[x]$ — найбільше ціле число, яке не перевищує x.

(О. Сарана, Житомир)

149. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — два набори попарно різних натуральних чисел, для яких виконується рівність

$$x_1^{x_1} + x_2^{x_2} + \cdots + x_n^{x_n} = y_1^{y_1} + y_2^{y_2} + \ldots + y_n^{y_n}.$$

Доведіть, що набір $y_1, y_2, \ldots, y_n$ можна отримати з набору $x_1, x_2, \ldots, x_n$ за допомогою деякої перестановки.

(А. Примак, Київ)

150. Чи існує функція $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, відмінна від константи, така, що

$$f(x,y) + f(y,x) = f(x^2, y^2) + 1$$

для всіх натуральних x, y?

(О. Манзюк, А. Примак, Київ)

151. Довести, що для будь-яких трьох чисел α, β, γ з інтервалу $(0; \pi/2)$ виконується нерівність

$$\alpha + \beta + \gamma \geq \alpha \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \beta \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} + \gamma \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

(В. Ясінський, Вінниця)

152. На площині розташовано два однаково орієнтовані трикутники ACB та ADE. При цьому $\angle DEA = \angle ACB = 90°$, $\angle DAE = \angle BAC$, $E \neq C$. Через точку D проведено пряму l, яка перпендикулярна до прямої EC. L — точка перетину прямих l та AC. Доведіть, що точки L, E, C, B лежать на одному колі.

(В. Ясінський, Вінниця)

153. Доведіть, що число

$$\frac{\text{НСД}(m,n)}{n}\binom{n}{m}$$

є цілим для довільної пари цілих чисел $n \geq m \geq 1$. Тут $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — біноміальний коефіцієнт.

(William Lowell Putnam Math. Competition)

148. Prove that the inequality
$$\{\sqrt[3]{n}\} > \frac{1}{3\sqrt[3]{n^2}}$$
holds for every positive integer n not equal to a cube of an integer. (Here $\{x\}$ is the fractional part of the number x, i.e., $\{x\} = x - [x]$, where $[x]$ is the greatest integer not greater than x.)

(O. Sarana, Zhytomyr)

149. Let $x_1, x_2, \dots, x_n$ and $y_1, y_2, \dots, y_n$ be two sets of pairwise different natural numbers for which the equality
$$x_1^{x_1} + x_2^{x_2} + \dots + x_n^{x_n} = y_1^{y_1} + y_2^{y_2} + \dots + y_n^{y_n}$$
holds. Prove that the set $y_1, y_2, \dots, y_n$ can be obtained from the set $x_1, x_2, \dots, x_n$ by a permutation.

(A. Prymak, Kyiv)

150. Does there exist a non-constant function $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ such that
$$f(x, y) + f(y, x) = f(x^2, y^2) + 1$$
for all positive integers x, y?

(O. Manziuk, A. Prymak, Kyiv)

151. Prove the inequality
$$\alpha + \beta + \gamma \geq \alpha \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \beta \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} + \gamma \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$
for any three numbers $\alpha, \beta, \gamma \in (0; \pi/2)$.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

152. The triangles ACB and ADE are oriented in the same way. We also have that $\angle DEA = \angle ACB = 90^\circ$, $\angle DAE = \angle BAC$, $E \neq C$. The line l passes through the point D and is perpendicular to the line EC. Let L be the intersection point of the lines l and AC. Prove that the points L, E, C, B belong to a common circumference.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

153. Prove that the expression
$$\frac{\gcd(m, n)}{n}\binom{n}{m}$$
is an integer for all pairs of integers $n \geq m \geq 1$.

(William Lowell Putnam Math. Competition)