

## Задачі 526 — 531

*Розділ ведуть Володимир Брайман та Олександр Толесніков*

526. Нехай  $ABCD$  — опуклий чотирикутник, в якому  $AB = AD$ . Точка  $T$  на діагоналі  $AC$  є такою, що  $\angle ABT + \angle ADT = \angle BCD$ . Довести, що  $AT + AC \geq AB + AD$ .

*(Baltic Way)*

527. На дошці записано декілька натуральних чисел. За один хід дозволяється обрати записані на дошці числа  $a \geq b$  та замінити їх на  $ab$  та залишок від ділення  $a$  на  $b$ . Процес завершується, якщо на дошці з'являється число 0. Чи може процес тривати нескінченно довго?

*(О. Толесніков, Єрусалим)*

528. Знайти найменше дійсне число  $x$ , яке задовольняє всі такі нерівності:

$$[x] < [x^2] < [x^3] < \dots < [x^n] < [x^{n+1}] < \dots,$$

де  $[x]$  позначає цілу частину числа  $x$ .

*(Мексика)*

529. Знайти всі дійсні розв'язки системи рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^3 + x_1 + x_2 = x_1^2 + 3, \\ x_2^3 + x_2 + x_3 = 2x_2^2 + 5, \\ x_3^3 + x_3 + x_4 = 3x_3^2 + 7, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{2016}^3 + x_{2016} + x_{2017} = 2016x_{2016}^2 + 4033, \\ x_{2017}^3 + 2x_{2017} + x_1 = 2017x_{2017}^2 + 4035. \end{array} \right.$$

*(І. Федак, Івано-Франківськ)*

530. Нехай  $ABCD$  — рівнобічна трапеція ( $AD \parallel BC$ ). На сторонах  $AB$  та  $CD$  відмітили точки  $K$  та  $N$  так, що  $AK = CN$ . Відрізок  $KN$  перетинає діагоналі  $AC$  та  $BD$  у точках  $S$  та  $T$  відповідно. Довести, що описані кола трикутників  $AKS$ ,  $BKT$ ,  $CNS$  та  $DNT$  мають спільну точку.

*(В. Брайман, Київ)*

531. На кожній клітинці дошки  $n \times n$  спить дракон. Двох драконів вважають сусідами, якщо їх клітинки мають спільну сторону. Кожним ходом Мінні будить дракона, в якого є живий сусід, а Макс спрямовує його у бік одного з живих сусідів. Дракон дихає вогнем на цього сусіда та знищує його, а потім знову засинає. Мінні хоче мінімізувати хропіння драконів та залишити найменшу можливу кількість живих драконів. Макс є членом ЛЕПД (Люди за Етичне Поводження з Драконами) та хоче врятувати якнайбільше драконів. Скільки драконів виживуть наприкінці, якщо а)  $n = 4$ ? б)  $n = 5$ ?

*(Гай Капон, Кір'ят-Оно, Дан Кармон, Тель-Авів,*

*Лев Радзівіловський, Петах-Тиква)*

526. Let  $ABCD$  be a convex quadrilateral with  $AB = AD$ . Let  $T$  be a point on the diagonal  $AC$  such that  $\angle ABT + \angle ADT = \angle BCD$ . Prove that  $AT + AC \geq AB + AD$ .

(Baltic Way)

527. Several positive integers are written on the board. Each turn, one can choose numbers  $a \geq b$  written on the board and replace them with  $ab$  and remainder from division  $a$  by  $b$ . The process stops if the number 0 appears on the board. Can the process be infinite?  
(O. Tolesnikov, Jerusalem)

528. Find the smallest real number  $x$  that satisfies all of the following inequalities:

$$[x] < [x^2] < [x^3] < \dots < [x^n] < [x^{n+1}] < \dots,$$

where  $[x]$  denotes the integer part of  $x$ .

(Mexico)

529. Find all real solutions to the system of equations

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^3 + x_1 + x_2 = x_1^2 + 3, \\ x_2^3 + x_2 + x_3 = 2x_2^2 + 5, \\ x_3^3 + x_3 + x_4 = 3x_3^2 + 7, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{2016}^3 + x_{2016} + x_{2017} = 2016x_{2016}^2 + 4033, \\ x_{2017}^3 + 2x_{2017} + x_1 = 2017x_{2017}^2 + 4035. \end{array} \right.$$

(I. Fedak, Ivano-Frankivsk)

530. Let  $ABCD$  be an isosceles trapezium ( $AD \parallel BC$ ). Points  $K$  and  $N$  are chosen on the sides  $AB$  and  $CD$  such that  $AK = CN$ . The segment  $KN$  intersects the diagonals  $AC$  and  $BD$  at points  $S$  and  $T$  respectively. Prove that the circumcircles of triangles  $AKS$ ,  $BKT$ ,  $CNS$  and  $DNT$  have a common point.  
(V. Brayman, Kyiv)

531. On each square of an  $n \times n$  board sleeps a dragon. Two dragons are called neighbors if their squares have a side in common. Each turn, Minnie wakes up a dragon which has a living neighbor and Max directs it towards one of its living neighbors. The dragon then breathes fire on that neighbor and destroys it, and then goes back to sleep. Minnie's goal is to minimize the snoring of the dragons and leave as few living dragons as possible. Max is a member of PETD (People for the Ethical Treatment of Dragons), and he wants to save as many dragons as he can. How many dragons will stay alive at the end if a)  $n = 4$ ? b)  $n = 5$ ?

(Guy Kapon, Kiryat Ono, Dan Carmon, Tel Aviv,  
Lev Radzivilovsky, Petah Tikva)