Задачі 520 —525

Розділ ведуть Володимир Брайман та Олександр Толесніков

520. Нехай O — центр кола ω, KA та KB — дотичні до ω, Q — довільна точка на хорді AB. Пряма $l \perp OQ$ проходить через точку Q та перетинає KA, KB в точках E, F відповідно. Довести, що Q — середина EF.

(А. Шаповал, Київ)

521. Для додатних чисел a, b, c, x довести, що

$$\frac{a^3}{ax^2+2bx+c}+\frac{b^3}{bx^2+2cx+a}+\frac{c^3}{cx^2+2ax+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{(x+1)^2}.$$

(І. Федак, Івано-Франківськ)

522. Нехай точка D лежить всередині трикутника ABC. Бісектриси кутів $\angle BAC$ та $\angle ACD$ перетинаються в точці N. Бісектриса кута $\angle ABD$ та пряма, яка містить бісектрису кута $\angle BDC$, перетинаються в точці T. Нехай Q — точка перетину прямих AB та CD. Довести, що точки N, T, Q лежать на одній прямій.

(О. Карлюченко, Київ)

523. Знайти всі трійки цілих чисел (a, b, c) такі, що число

$$N = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2} + 2$$

є степенем 2016.

(Степінь 2016 це ціле число вигляду 2016^n, де n — невід'ємне ціле число.)

(Junior Balkan Mathematical Olympiad)

524. Чи можна розташувати на площині 100 опуклих п'ятикутників так, аби перетин кожних двох з них був семикутником?

(О. Толесніков, Єрусалим)

525. Довести, що

$$\tfrac{15}{2}\Big(\big(\sqrt{3}+1\big)\sqrt{3-\sqrt{5}}-\big(\sqrt{3}-1\big)\sqrt{5+\sqrt{5}}\Big) < \pi < 60 \cdot \frac{\big(\sqrt{3}+1\big)\sqrt{3-\sqrt{5}}-\big(\sqrt{3}-1\big)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\big(\sqrt{3}+1\big)\sqrt{5+\sqrt{5}}+\big(\sqrt{3}-1\big)\sqrt{3-\sqrt{5}}}.$$

(Р. Ушаков, Київ)

520. Let O be the center of circle ω, let KA and KB be tangent lines to ω and let Q be an arbitrary point on the chord AB. Straight line $l \perp OQ$ passes through point Q and intersects KA, KB at points E, F respectively. Prove that Q is the midpoint of EF.

(A. Shapoval, Kyiv)

521. For positive numbers a, b, c, x prove that

$$\frac{a^3}{ax^2+2bx+c}+\frac{b^3}{bx^2+2cx+a}+\frac{c^3}{cx^2+2ax+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{(x+1)^2}.$$

(I. Fedak, Ivano-Frankivsk)

522. Let D be an interior point of triangle ABC. Angle bisectors of angles $\angle BAC$ and $\angle ACD$ intersect at point N. Angle bisector of angle $\angle ABD$ and straight line which contains angle bisector of angle $\angle BDC$ intersect at point T. Let Q be the intersection point of straight lines AB and CD. Prove that points N, T, Q are collinear.

(O. Karlyuchenko, Kyiv)

523. Find all triplets of integers (a, b, c) such that the number

$$N = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2} + 2$$

is a power of 2016.

(A power of 2016 is an integer of form 2016^n, where n is a non-negative integer.)

(Junior Balkan Mathematical Olympiad)

524. Is it possible to locate 100 convex pentagons in the plane such that the intersection of each two of them is a heptagon?

(O. Tolesnikov, Jerusalem)

525. Prove that

$$\tfrac{15}{2}\Big(\big(\sqrt{3}+1\big)\sqrt{3-\sqrt{5}}-\big(\sqrt{3}-1\big)\sqrt{5+\sqrt{5}}\Big) < \pi < 60 \cdot \frac{\big(\sqrt{3}+1\big)\sqrt{3-\sqrt{5}}-\big(\sqrt{3}-1\big)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\big(\sqrt{3}+1\big)\sqrt{5+\sqrt{5}}+\big(\sqrt{3}-1\big)\sqrt{3-\sqrt{5}}}.$$

(R. Ushakov, Kyiv)