Задачі 514 —519

Розділ ведуть Володимир Брайман та Олександр Толесніков

514. Нехай n — натуральне число. Припустимо, що всі його додатні дільники можна розбити на пари таким чином, що сума чисел у кожній парі є простим числом. Довести, що ці прості числа є різними та жодне з них не є дільником n.

(Бенілюкс)

515. Довести, що для кожного натурального числа a існують такі цілі числа b, c, що жодне з чисел $\dfrac{ab}{c+1}, \dfrac{bc}{a+1}, \dfrac{ca}{b+1}$ не є цілим, а їх сума є цілою.

(В. Брайман, Київ)

516. Нехай BT — висота та H — точка перетину висот трикутника ABC. Точка N симетрична до H відносно BC. Описане коло трикутника ATN перетинає BC в точках F та K. Довести, що $FB = BK$.

(В. Стародуб, Київ)

517. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що

$$xf(x-y) + yf(x+y) = xf(x) + yf(y)$$

для всіх $x, y \in \mathbb{R}$. *(Н. Рімок, Герцлія)*

518. Нехай n, k — такі натуральні числа, що $n \geq 2$ та $k \geq \frac{5}{2}n - 1$. Довести, що для будь-яких k точок з цілими координатами від 1 до n включно існує коло, яке проходить принаймні через чотири з цих точок.

(Південна Корея)

519. Чи існує 6-значне число $\overline{a_1a_2\dots a_6}$ таке, що сума кубів

$$\overline{a_1a_2\dots a_6}^3 + \overline{a_6\dots a_2a_1}^3$$

закінчується на 6 нулів? *(О. Руденко, Київ)*

514. Let n be a positive integer. Suppose that its positive divisors can be partitioned into pairs in such a way that the sum of each pair is a prime number. Prove that these prime numbers are distinct and that none of these are a divisor of n.

(Benelux)

515. Prove that for every positive integer a there exist integers b, c such that each of numbers $\dfrac{ab}{c+1}, \dfrac{bc}{a+1}, \dfrac{ca}{b+1}$ is not integer and their sum is integer.

(V. Brayman, Kyiv)

516. Let BT be the altitude and H be the intersection point of the altitudes of triangle ABC. Point N is symmetric to H with respect to BC. The circumcircle of triangle ATN intersects BC at points F and K. Prove that $FB = BK$.

(V. Starodub, Kyiv)

517. Find all the functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$xf(x-y) + yf(x+y) = xf(x) + yf(y)$$

for every $x, y \in \mathbb{R}$. *(N. Rimock, Herzliya)*

518. Let n, k be positive integers such that $n \geq 2$ and $k \geq \frac{5}{2}n - 1$. Prove that for every k lattice points with coordinates in range from 1 to n, inclusive, there exist a circle which passes through at least four of these points.

(Republic of Korea)

519. Does there exist a 6-digit number $\overline{a_1 a_2 \ldots a_6}$ such that the sum of cubes

$$\overline{a_1 a_2 \ldots a_6}^3 + \overline{a_6 \ldots a_2 a_1}^3$$

ends with 6 zeroes? *(O. Rudenko, Kyiv)*