Задачі 508 —513

Розділ ведуть Володимир Брайман та Олександр Толесніков

508. Кола ω_1 та ω_2 перетинаються в точках A та B. На колі ω_1 відмітили точки D, H, а на колі ω_2 відмітили точки E, G так, що точки D, A, E лежать на одній прямій, DG — дотична до ω_2 та EH — дотична до ω_1. Довести, що відрізки DE, DG та EH є сторонами прямокутного трикутника. *(М. Плотніков, Київ)*

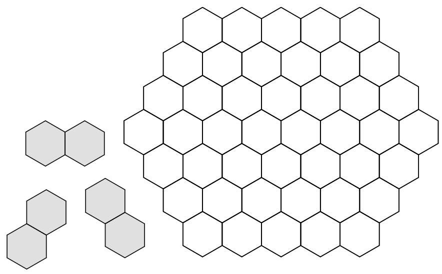
509. На хорді AB кола з центром O взяли точку T. Нехай K — основа перпендикуляра, опущеного з точки T на OB, Q — центр кола, описаного навколо трикутника ATK. Довести, що $OQ \parallel AB$. *(М. Власенко, Київ)*

510. Нехай функцію $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ задано таким чином: якщо $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ — розклад числа n на прості множники, то $f(n)$ дорівнює кількості $i \leq k$, для яких $\alpha_i = 1$ (наприклад, $f(2016) = f(2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1) = 1$, $f(100) = f(2^2 \cdot 5^2) = 0$). Чи для кожного натурального числа N знайдеться множина з N послідовних натуральних чисел така, що для кожного числа n з цієї множини $f(n) = 2016$?

(Сербія)

511. Шестикутна дошка на рисунку покрита плитками, які не перекриваються. Кожна плитка складається з двох шестикутних клітинок та має одну з трьох можливих орієнтацій. Довести, що плиток кожної орієнтації парна кількість.

(О. Толесніков, Єрусалим)



512. Для довільних $a, b, c > 0$ довести нерівність

$$ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right) + bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) + ca\left(1 - \frac{b^2}{(c+a)^2}\right) \leq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

(К. Яцків, Київ)

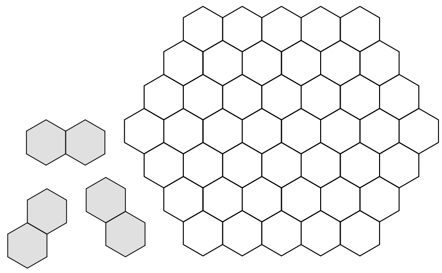
513. Елісон впорядкувала список з 20 хокейних команд за її уявленнями про їх силу, але відмовляється повідомляти його. Коли Бенджамін називає три команди, вона обирає сказати йому, яка з цих трьох команд на її думку найслабша чи яка з цих трьох команд на її думку найсильніша. Бенджамін може робити це скільки завгодно разів. Визначити найбільше N, при якому Бенджамін гарантовано зможе знайти команди $T_1, T_2, \dots, T_N$, про які йому відомо, що на думку Елісон команда T_i сильніша за T_{i+1} при всіх $1 \leq i < N$. *(Великобританія)*

508. Circles ω_1 and ω_2 intersect at points A and B. Points D, H are chosen on the circle ω_1 and points E, G are chosen on the circle ω_2 such that points D, A, E are collinear, DG is a tangent line to ω_2 and EH is a tangent line to ω_1. Prove that the segments DE, DG and EH are sides of a right triangle. *(M. Plotnikov, Kyiv)*

509. Point T is chosen on chord AB of a circle with center O. Let K be the foot of a perpendicular drawn from point T on OB and Q be the circumcenter of triangle ATK. Prove that $OQ \parallel AB$. *(M. Vlasenko, Kyiv)*

510. Let function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ be defined in such way: if $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ is canonic prime factorization of number n then $f(n)$ is the quantity of $i \leq k$ for which $\alpha_i = 1$ (e.g., $f(2016) = f(2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1) = 1$, $f(100) = f(2^2 \cdot 5^2) = 0$). Does for every positive integer N exist set of N consecutive positive integers such that $f(n) = 2016$ for every integer n in this set? *(Serbia)*

511. The hexagonal board in the figure is covered by non-overlapping domino tiles. Each domino tile consists of two hexagonal cells and has one of three possible orientations. Prove that there is an even number of tiles of each of the orientations. *(O. Tolesnikov, Jerusalem)*



512. For every $a, b, c > 0$ prove the inequality

$$ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right) + bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) + ca\left(1 - \frac{b^2}{(c+a)^2}\right) \leq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

(K. Yatzkiv, Kyiv)

513. Alison has compiled a list of 20 hockey teams, ordered by how good she thinks they are, but refuses to share it. Benjamin may mention three teams to her, and she will then choose either to tell him which she thinks is the weakest team of the three, or which she thinks is the strongest team of the three. Benjamin may do this as many times as he likes. Determine the largest N such that Benjamin can guarantee to be able to find a sequence $T_1, T_2, \ldots, T_N$ of teams with the property that he knows that Alison thinks that T_i is better than T_{i+1} for each $1 \leq i < N$. *(Great Britain)*