Задачі 502 —507

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

502. Позначимо $P(n)$ найбільший простий дільник числа n. Знайти всі цілі числа $n \geq 2$, для яких
$$P(n) + \left[\sqrt{n}\right] = P(n+1) + \left[\sqrt{n+1}\right]$$
(тут $[x]$ позначає цілу частину числа x.)

(Baltic Way)

503. У трикутнику ABC точка перетину висот H, центр описаного кола O та центр зовнівписаного кола I_a лежать на одній прямій. Чи обов'язково трикутник ABC рівнобедрений?

(І. Кушнір, Київ)

504. Три їжачки знаходились у вершинах правильного трикутника зі стороною 100 м. Потім один їжачок пройшов вздовж прямої 1 м, другий 2 м, третій 3 м (можливо, вздовж різних прямих). Чи можуть їжачки опинитись у вершинах

а) правильного трикутника?

б) правильного трикутника зі стороною 100 м?

(О. Толесніков, Єрусалим)

505. Довести, що для будь-яких дійсних чисел x та y
$$(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1) \geq 2(x+y)(x-1)(y-1).$$
При яких x та y досягається рівність?

(В. Ясінський, Вінниця)

506. Нехай $n > 2$ — ціле число. Колода містить $\frac{n(n-1)}{2}$ карт, занумерованих числами
$$1, 2, 3, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}.$$
Дві карти утворюють *магічну пару*, якщо числа на них є послідовними або числа на них це 1 та $\frac{n(n-1)}{2}$. Для яких n можна розкласти карти у n купок так, аби серед карток з будь-яких двох купок знайшлася рівно одна магічна пара?

(Baltic Way)

507. Кожну точку площини пофарбовано в один з чотирьох кольорів. Довести, що існує квадрат зі стороною 1 на цій площині, який має принаймні дві вершини одного кольору.

(І. Лідер, Кембридж, І. Протасов та С. Слободянюк, Київ)

502. Denote by $P(n)$ the greatest prime divisor of n. Find all integers $n \geq 2$ for which

$$P(n) + \left[\sqrt{n}\right] = P(n+1) + \left[\sqrt{n+1}\right]$$

(here $[x]$ denotes the integer part of x).

(Baltic Way)

503. In triangle ABC the orthocenter H, the circumcenter O and excenter I_a are collinear. Is it necessarily true that triangle ABC is isosceles?

(I. Kushnir, Kyiv)

504. Three hedgehogs were in the vertices of equilateral triangle with side length 100 m. Then the first hedgehog strolled 1 m along the straight line, the second hedgehog strolled 2 m and the third hedgehog strolled 3 m (maybe along different straight lines). Is it possible that the hedgehogs are in the vertices of

a) equilateral triangle?

b) equilateral triangle with side length 100 m?

(O. Tolesnikov, Jerusalem)

505. Prove that for every real numbers x and y

$$(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1) \geq 2(x + y)(x - 1)(y - 1).$$

For which x and y does the equality hold?

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

506. Let $n > 2$ be an integer. A deck contains $\frac{n(n-1)}{2}$ cards, numbered

$$1, 2, 3, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}.$$

Two cards form a *magic pair* if their numbers are consecutive, or if their numbers are 1 and $\frac{n(n-1)}{2}$. For which n is it possible to distribute the cards into n stacks in such a manner that, among the cards in any two stacks, there is exactly one magic pair?

(Baltic Way)

507. Every point in the plane is painted into one of four colours. Prove that there exists a square with side 1 in the plane which has at least two vertices of the same colour.

(I. Leader, Cambridge, I. Protasov and S. Slobodyanyuk, Kyiv)