Задачі 496 —501

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

496. Точка T симетрична центру квадрата $ABCD$ відносно точки A. Відновити квадрат за відомими точками B та T.

(Д. Кравець, Київ)

497. Знайти всі прості числа a, b, c та натуральні числа k, які задовольняють рівняння

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1.$$

(Junior Balkan Mathematical Olympiad)

498. Бісектриса кута $\angle A$ трикутника ABC перетинає описане коло у точці W. Пряма $l \parallel AC$ проходить через точку W і перетинає AB та BC у точках P та K відповідно. Відомо, що $AK = CP$. Довести, що $BP = KW$.

(О. Барановський, Київ)

499. Знайти всі сюр'єктивні функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такі, що для будь-яких натуральних чисел a та b виконується рівно одна з таких рівностей:

$$f(a) = f(b),$$
$$f(a + b) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

(Функція $f : X \to Y$ називається сюр'єктивною, якщо для кожного $y \in Y$ існує $x \in X$ такий, що $f(x) = y$.)

(Middle European Mathematical Olympiad)

500. На стороні BC гострокутного трикутника ABC взято довільну точку D. Серединний перпендикуляр до відрізка BD перетинає AB в точці X, а серединний перпендикуляр до відрізка DC перетинає AC в точці Y. Описане коло трикутника DXY перетинає вдруге сторону BC в точці Z. Довести, що ортоцентр трикутника XYZ не залежить від вибору точки D.

(Д. Хілько, Київ)

501. На шахівниці розміру $n \times n$ сидять муха та два павуки. Кожним ходом муха може переповзти у клітинку, яка має спільну вершину з клітинкою, де вона знаходиться (вона також може залишитися на місці). Кожним ходом павуків кожен павук може переміститися у клітинку, яка має спільну сторону з клітинкою, де він знаходиться (він також може залишитися на місці). Якщо павук та муха опинилися в одній клітинці, то павуки виграють. Чи мають павуки виграшну стратегію?

(О. Толесніков, Єрусалим)

496. Point T is symmetric to the center of square $ABCD$ with respect to the point A. Reconstruct the square if known are points B and T.

(D. Kravetz, Kyiv)

497. Find all prime numbers a, b, c and positive integers k which satisfy the equation

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1.$$

(Junior Balkan Mathematical Olympiad)

498. Angle bisector of angle $\angle A$ of triangle ABC intersects the circumcircle at point W. Straight line $l \parallel AC$ passes through point W and intersects AB and BC at points P and K respectively. It is known that $AK = CP$. Prove that $BP = KW$.

(O. Baranovskiy, Kyiv)

499. Find all surjective functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for all positive integers a and b, exactly one of the following equations is true:

$$f(a) = f(b),$$
$$f(a+b) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

(A function $f : X \to Y$ is said to be surjective if for every $y \in Y$ there exists $x \in X$ such that $f(x) = y$.)

(Middle European Mathematical Olympiad)

500. Let D be an arbitrary point on the side BC of acute triangle ABC. Perpendicular bisector of segment BD intersects AB at point X, and perpendicular bisector of segment DC intersects AC at point Y. The circumcircle of triangle DXY intersects the side BC again at point Z. Prove that the orthocenter of triangle XYZ does not depend on the choice of point D.

(D. Khilko, Kyiv)

501. On the $n \times n$ checkerboard there are a fly and two spiders. On its each turn, the fly can pass to a square, which has a common side with the square it occupies (it can also remain at its current place). On each turn of the spiders, each spider can move to a square, which has a common side with the square it occupies (or it can remain at its current place). If a spider and the fly arrive to the same square, the spiders win. Do the spiders have a winning strategy?

(O. Tolesnikov, Jerusalem)