Задачі 490 —495

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

490. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що

$$xf(y-z) + yf(z-x) + zf(x-y) = x + y + z$$

для всіх $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(В. Фомічьов, Одеса)

491. Послідовність цілих чисел $\{a_n, n \geq 1\}$ є такою, що $a_1 = 2$ та $a_{n+1} = 2^{a_n}, n \geq 1$. Знайти всі такі номери n, для яких $a_n + 13$ — просте число.

(Д. Ткаченко, Київ)

492. Комітет з 3366 кінокритиків голосує за премії “Оскар”. Кожен критик голосує рівно за одного актора та рівно за одну актрису. Після голосування виявилося, що для кожного натурального числа $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ існує деякий актор або деяка актриса, за якого або яку проголосували рівно n разів. Довести, що існують два критики, які проголосували за одного й того самого актора та за одну й ту саму актрису.

(Balkan Mathematical Olympiad)

493. Трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$) вписано в коло ω. Нехай точка M — середина AD, пряма CM перетинає коло ω в точці T, X — середина BT, пряма AX перетинає коло ω в точці Y. Довести, що $DY \parallel BT$.

(Т. Баценко, Київ)

494. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$x^2 + xy + y^2 = \left(\frac{x+y}{3} + 1\right)^3.$$

(USAMO)

495. Том пофарбував круговий паркан з 2015 секцій таким чином, що кожну секцію пофарбовано в один з чотирьох кольорів. Потім він повторює таку операцію доки це можливо: обирає три сусідні секції різних кольорів та перефарбовує їх у четвертий колір. Довести, що Том не зможе перефарбовувати паркан вказаним чином нескінченну кількість разів.

(О. Руденко, Київ)

490. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$xf(y-z) + yf(z-x) + zf(x-y) = x + y + z$$

for every $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(V. Fomichyov, Odesa)

491. The sequence of integers $\{a_n, n \geq 1\}$ is such that $a_1 = 2$ and $a_{n+1} = 2^{a_n}, n \geq 1$. Find all numbers n for which $a_n + 13$ is a prime number.

(D. Tkachenko, Kyiv)

492. A committee of 3366 film critics are voting for the Oscars. Every critic voted just an actor and just one actress. After the voting, it was found that for every positive integer $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$, there is some actor or some actress who was voted exactly n times. Prove that there are two critics who voted the same actor and the same actress.

(Balkan Mathematical Olympiad)

493. Trapezium $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$) is inscribed into the circle ω. Let M be the midpoint of AD, straight line CM intersects ω at point T, X be the midpoint of BT, straight line AX intersects ω at point Y. Prove that $DY \parallel BT$.

(T. Batsenko, Kyiv)

494. Solve in integers the equation

$$x^2 + xy + y^2 = \left(\frac{x+y}{3} + 1\right)^3.$$

(USAMO)

495. Tom painted round fence which consists of 2005 sections in such way that every section is painted in one of four colours. Then he repeats the following while it is possible: he chooses three neighbouring sections of distinct colours and repaints them into the fourth colour. Prove that Tom can't repaint the fence in such way infinitely many times.

(O. Rudenko, Kyiv)