Задачі 484 —489

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

484. У п'ятикутнику $ABCDE$ відомо, що

$$BC \parallel AE,\ BC = \tfrac{1}{2}AE,\ DE \parallel AB \text{ та } DE = \tfrac{1}{2}AB.$$

Довести, що $CD \parallel BE$ та $CD = \frac{1}{2}BE$.

(О. Грищенко, Київ)

485. Розглянемо послідовність $a_n = |n(n+1)-19|$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Для довільного $n \neq 4$ довести, що якщо для кожного $k < n$ числа a_k та a_n є взаємно простими, то a_n — просте число.

(Польща)

486. Нехай O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC, H — ортоцентр цього трикутника, E — середина OH. Побудувати трикутник ABC, якщо відомі прямі BC, AO та точка E.

(К. Кадіров та К. Яцків, Київ)

487. Для довільних $a, b, c > 1$ таких, що $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, довести нерівність

$$a^2b^2c^2 \leq a^{b+1}c + b^{c+1}a + c^{a+1}b.$$

(М. Мороз, Велика Олексадрівка, Київська обл.)

488. Нехай $n > 1$ — натуральне число. Всередині трикутника ABC обрали точку A_1 так, що $\angle ABA_1 = \frac{1}{n}\angle ABC$ та $\angle ACA_1 = \frac{1}{n}\angle ACB$. Точки B_1 та C_1 визначаються аналогічним чином. Довести, що прямі AA_1, BB_1 та CC_1 перетинаються в одній точці.

(В. Ясінський, Вінниця)

489. У Оддесдонській початковій школі є непарна кількість класів. У кожному класі навчається непарна кількість учнів. З кожного класу одного учня обирають до шкільної ради. Довести, що такі твердження рівносильні:

(a) Існує більше способів сформувати шкільну раду, яка містить непарну кількість хлопців, ніж способів сформувати шкільну раду, яка містить непарну кількість дівчат.

(b) Існує непарна кількість класів, у яких хлопців більше, ніж дівчат.

(Великобританія)

484. In the pentagon $ABCDE$ it is known that

$$BC \parallel AE,\ BC = \tfrac{1}{2}AE,\ DE \parallel AB \ \text{ and } \ DE = \tfrac{1}{2}AB.$$

Prove that $CD \parallel BE$ and $CD = \frac{1}{2}BE$.

(O. Gryschenko, Kyiv)

485. Consider the sequence $a_n = |n(n+1) - 19|$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ For each $n \neq 4$ prove that if for every $k < n$ numbers a_k and a_n are relatively prime then a_n is a prime number.

(Poland)

486. In the triangle ABC let O be the circumcenter, H be the orthocenter and E be the midpoint of OH. Construct triangle ABC if lines BC, AO and point E are given.

(K. Kadirov and K. Yatzkiv, Kyiv)

487. For every $a, b, c > 1$ such that $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ prove the inequality

$$a^2b^2c^2 \leq a^{b+1}c + b^{c+1}a + c^{a+1}b.$$

(M. Moroz, Velyka Oleksandrivka, Kyivska obl.)

488. Let $n > 1$ be positive integer. Point A_1 is chosen inside triangle ABC such that $\angle ABA_1 = \frac{1}{n}\angle ABC$ and $\angle ACA_1 = \frac{1}{n}\angle ACB$. Points B_1 and C_1 are defined in similar way. Prove that the straight lines AA_1, BB_1 and CC_1 are concurrent.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

489. In Oddesdon Primary School there are an odd number of classes. Each class contains an odd number of pupils. One pupil from each class will be chosen to form the school council. Prove that the following two statements are equivalent.

(a) There are more ways to form a school council which includes an odd number of boys than ways to form a school council which includes an odd number of girls.

(b) There are an odd number of classes which contain more boys than girls.

(Great Britain)