

Задачі 478 — 483

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

За другі 10 років існування журналу у “Нашому конкурсі” опубліковано майже 200 нових задач 45 авторів з 18 міст та населених пунктів України та світу.

Запрошуємо усіх авторів “Нашого конкурсу” до подальшої співпраці з журналом!

478. Точка A лежить на колі ω , а точка X — всередині або зовні цього кола. Побудувати на колі ω такі точки B та C , щоб точка X була центром вписаного або зовнівписаного кола трикутника ABC .

(І. Кушнір, Київ)

479. Нехай x, y, z — такі додатні дійсні числа, що $x + y + z = 1$. Довести, що

$$(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) \leq 27x^2y^2z^2.$$

(В. Ясінський, Вінниця)

480. Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло з діаметром AD . Нехай K — точка перетину діагоналей $ABCD$. Коло ω з центром у точці K дотикається до BC . Дотичні, проведені до ω з точок B та C , перетинаються в точці N . Довести, що точка N лежить на AD .

(О. Карлюченко, Київ)

481. Нехай $n > 1$ — натуральне число. Квадрат $n \times n$ розбито на n^2 одиничних квадратів. Серед цих одиничних квадратів n пофарбовано у зелений колір та n у блакитний, а решту квадратів пофарбовано у білий колір. Яких розфарбувань більше: тих, для яких у кожному рядку є рівно один зелений квадрат, а у кожному стовпчику рівно один синій квадрат, чи тих, для яких у кожному рядку є рівно один зелений та рівно один синій квадрат?

(Південно-Африканська Республіка)

482. Нехай ω — описане коло трикутника ABC , l — дотична до кола ω у точці A . Кола ω_1 та ω_2 дотикаються до прямих l , BC та до кола ω зовнішнім чином. Позначимо D, E точки дотику кіл ω_1, ω_2 з BC . Довести, що описані кола трикутників ABC та ADE дотикаються.

(М. Плотніков, Київ)

483. Знайти всі функції $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що $f(x + y) = f(x - 1)f(y) + f(y - 1)f(x)$ при всіх цілих x, y .

(О. Толесніков, Єрусалим)

478. Point A lies on the circle ω and point X lies inside or outside this circle. Construct points B and C on ω such that point X is the center of incircle or excircle of triangle ABC .

(I. Kushnir, Kyiv)

479. Let x, y, z be positive real numbers such that $x + y + z = 1$. Prove that

$$(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) \leq 27x^2y^2z^2.$$

(V. Yasinsky, Vinnytsya)

480. Quadrangle $ABCD$ is inscribed into circle with diameter AD . Let K be the intersection point of diagonals of $ABCD$. Circle ω with center K touches BC . Tangent lines drawn to ω from points B and C intersect at point N . Prove that N lies on AD .

(O. Karlyuchenko, Kyiv)

481. Let $n > 1$ be an integer. An $n \times n$ -square is divided into n^2 unit squares. Of these unit squares, n are coloured green and n are coloured blue, and all remaining ones are coloured white. Are there more such colourings for which there is exactly one green square in each row and exactly one blue square in each column; or colourings for which there is exactly one green square and exactly one blue square in each row?

(South Africa)

482. Let ω be the circumcircle of triangle ABC , l be the tangent line to the circle ω at point A . The circles ω_1 and ω_2 touch lines l, BC and circle ω externally. Denote by D, E the points where circles ω_1, ω_2 touch BC . Prove that the circumcircles of triangles ABC and ADE are tangent.

(M. Plotnikov, Kyiv)

483. Find all functions $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $f(x + y) = f(x - 1)f(y) + f(y - 1)f(x)$ for every integers x, y .

(O. Tolesnikov, Jerusalem)