Задачі 472 —477

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

472. Послідовність дійсних чисел $\{a_n,\ n \geq 1\}$ є такою, що

$$a_1 = 0 \quad \text{та} \quad (n+1)a_{n+1} = n(a_n + 1),\ n \geq 1.$$

Знайти всі такі номери n, для яких a_n — квадрат цілого числа.

(В. Ясінський, Вінниця)

473. Нехай BH_2, CH_3 — висоти трикутника ABC. Відновити трикутник ABC, якщо відомі точка A та прямі BC, H_2H_3.

(С. Яковлєв та Г. Філіпповський, Київ)

474. Нехай a, b, c — додатні дійсні числа. Довести нерівність

$$\frac{a^3}{4a+b+c} + \frac{b^3}{4b+c+a} + \frac{c^3}{4c+a+b} \geq \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2).$$

(В. Ясінський, Вінниця)

475. У нерівносторонньому трикутнику ABC відомо, що $AB^2 + BC^2 = 2AC^2$. Нехай AT, CP — висоти, H — ортоцентр, M — точка перетину медіан трикутника ABC. Довести, що прямі AC, PT та HM перетинаються в одній точці.

(А. Тригуб, Київ)

476. Нехай L — точка перетину його діагоналей опуклого чотирикутника $ABCD$, в якому $AB = AC = BD$, P — друга точка перетину описаних кіл трикутників ABC та ALD, а Q — точка перетину прямих BC та AP. Довести, що LQ — бісектриса кута $\angle CLD$.

(В. Ясінський, Вінниця)

477. Натуральне число n є кумедним, якщо для кожного додатного дільника d числа n число $d+2$ є простим. Знайти всі кумедні числа з найбільшою можливою кількістю дільників.

(Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe)

472. The sequence of real numbers $\{a_n,\ n \geq 1\}$ is such that

$$a_1 = 0 \quad \text{and} \quad (n+1)a_{n+1} = n(a_n + 1),\ n \geq 1.$$

Find all numbers n for which a_n is a square of an integer.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

473. Let BH_2 and CH_3 be the altitudes of triangle ABC. Restore the triangle if the point A and the lines BC, H_2H_3 are given.

(S. Yakovlev and G. Filippovskiy, Kyiv)

474. Let a, b, c be positive real numbers. Prove the inequality

$$\frac{a^3}{4a+b+c} + \frac{b^3}{4b+c+a} + \frac{c^3}{4c+a+b} \geq \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2).$$

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

475. In a non-equilateral triangle ABC it is given that $AB^2 + BC^2 = 2AC^2$. Let AT and CP be the altitudes, H be the orthocenter, and M be the intersection point of the medians of the triangle ABC. Prove that the lines AC, PT and HM are concurrent.

(A. Trygub, Kyiv)

476. Let the diagonals of a convex quadrilateral $ABCD$ intersect at point L, and it holds $AB = AC = BD$. Let P be the second intersection point of circumcircles of triangles ABC and ALD, and the lines BC and AP intersect at point Q. Prove that LQ is angle bisector of the angle $\angle CLD$.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

477. A positive integer n is funny if for all positive divisors d of n, $d+2$ is a prime number. Find all funny numbers with the largest possible number of divisors.

(Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe)