Задачі 466 —471

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

466. Вписане у трикутник ABC коло має центр I та дотикається сторін BC, AC, AB у точках K_1, K_2, K_3. Прямі AI та CI перетинають відрізок K_1K_3 у точках E та F, а прямі AF та CE перетинаються у точці T. Довести, що точки K_2, I, T лежать на одній прямій.

(М. Рожкова, Київ)

467. Розв'язати рівняння $(x-1)^4 - x^3 = 17$.

(В. Ясінський, Вінниця)

468. Знайти всі впорядковані трійки натуральних чисел (a, b, c) такі, що $2^a+3^b+1 = 6^c$.

(Японія)

469. У турнірі брали участь n команд, кожна зіграла з кожною іншою один раз без нічиїх. При яких n завжди можна розбити всі команди на декілька груп так, щоб команди кожної групи разом здобули однакову кількість перемог?

(О. Руденко, Київ)

470. Пряма, паралельна стороні BC трикутника ABC, перетинає сторони AB і AC у точках P і Q відповідно. Всередині трикутника APQ відмітили довільну точку M. Позначимо через E та F точки перетину відрізків BM і CM з відрізком PQ відповідно. Нехай N — друга точка перетину описаних кіл трикутників PMF і QME. Довести, що точки A, M і N лежать на одній прямій.

(В. Ясінський, Вінниця)

471. Множина S додатних дійсних чисел називається *потужною*, якщо для будь-яких двох різних елементів a, b множини S принаймні одне з чисел a^b або b^a теж є елементом S.

   a) Навести приклад чотирьохелементної потужної множини.

   b) Довести, що кожна скінченна потужна множина містить не більше чотирьох елементів.

(Іран)

466. Incircle of triangle ABC with center I touches sides BC, AC, AB at points K_1, K_2, K_3. Straight lines AI and CI intersect the segment K_1K_3 at points E and F. Straight lines AF and CE intersect at point T. Prove that points K_2, I, T are collinear.

(M. Rozhkova, Kyiv)

467. Solve the equation $(x-1)^4 - x^3 = 17$.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

468. Find all ordered triplets of positive integers (a, b, c) such that $2^a + 3^b + 1 = 6^c$.

(Japan)

469. There are n teams in a tournament. Each team plays every other team once without draws. For which n it is always possible to divide all teams into several groups such that each group of teams won the same number of games in total?

(O. Rudenko, Kyiv)

470. Straight line parallel to side BC of triangle ABC intersects sides AB and AC at points P and Q respectively. Point M is chosen arbitrarily inside triangle APQ. Segments BM and CM intersect the segment PQ at points E and F respectively. Let N be the second intersection point of circumcircles of triangles PMF and QME. Prove that points A, M and N are collinear.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

471. A subset S of positive real numbers is called *powerful* if for any two distinct elements a, b of S, at least one of a^b or b^a is also an element of S.

a) Give an example of a four elements powerful set.

b) Prove that every finite powerful set has at most four elements.

(Iran)