Задачі 460 —465

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

460. Нехай AH — висота гострокутного трикутника ABC. Побудувати трикутник за відрізками BH, CH та $AB + AC$.

(А. Ніколаєв, Київ)

461. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — додатні дійсні числа, $n \geq 2$. Довести, що

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq 2n^2.$$

(В. Ясінський, Вінниця)

462. Нехай дотичні до описаного кола трикутника ABC у вершинах B та C перетинаються в точці D, а E — точка перетину AD з BC. Довести, що $AE = ED$ тоді і тільки тоді, коли $AB^2 + AC^2 = 2BC^2$.

(В. Брайман, Київ)

463. Нехай AD — висота гострокутного трикутника ABC, O — центр описаного кола та H — ортоцентр цього трикутника, MN — середня лінія, паралельна до BC, а T — точка перетину AO з MN. Довести, що середина OH належить TD.

(О. Карлюченко, Київ)

464. На дошці записано многочлен $x^2 + x + 2014$. Келвін та Хоббс по черзі роблять ходи у такій грі (першим ходить Келвін). Своім ходом Келвін має збільшити або зменшити коефіцієнт біля x на 1, а Хоббс має своїм ходом збільшити або зменшити на 1 вільний член. Келвін виграє, якщо в деякий момент часу на дошці опиниться многочлен з цілими коренями. Довести, що Келвін має виграшну стратегію.

(Індія)

465. Про дійсні числа a, b відомо, що $a^3 = 3ab^2 + 11$ та $b^3 = 3a^2b + 2$. Довести, що $a^2 + b^2 = 5$.

(В. Ясінський, Вінниця)

460. Let AH be the altitude of acute triangle ABC. Construct triangle ABC if BH, CH and $AB + AC$ are given.

(A. Nikolayev, Kyiv)

461. Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be positive real numbers, $n \geq 2$. Prove that

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq 2n^2.$$

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

462. Let the tangents to the circumcircle of a triangle ABC at vertices B and C intersect at point D and let E be the point of intersection of AD and BC. Prove that $AE = ED$ if and only if $AB^2 + AC^2 = 2BC^2$.

(V. Brayman, Kyiv)

463. Let AD be the altitude of acute triangle ABC, O be the circumcenter and H be the orthocenter of this triangle, MN be the midline parallel to BC, and T be the intersection point of AO and MN. Prove that the midpoint of OH belongs to TD.

(O. Karlyuchenko, Kyiv)

464. Written on a blackboard is the polynomial $x^2 + x + 2014$. Calvin and Hobbes take turns alternatively (starting with Calvin) in the following game. During his turn, Calvin should either increase or decrease the coefficient of x by 1. And during his turn, Hobbes should either increase or decrease the constant coefficient by 1. Calvin wins if at any point of time the polynomial on the blackboard at that instant has integer roots. Prove that Calvin has a winning strategy.

(India)

465. Let a, b be real numbers such that $a^3 = 3ab^2 + 11$ and $b^3 = 3a^2b + 2$. Prove that $a^2 + b^2 = 5$.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)