Задачі 454 —459

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

454. Для довільних $a, b, c > 0$ довести нерівність

$$\frac{a}{b+c}\left(a^2+bc\right)+\frac{b}{c+a}\left(b^2+ca\right)+\frac{c}{a+b}\left(c^2+ab\right)\geq a^2+b^2+c^2.$$

(В. Ясінський, Вінниця)

455. Дано кут з вершиною A та точки D, E всередині нього. Побудувати на сторонах кута точки B та C так, щоб точка D лежала на BC, а точка E — на описаному колі трикутника ABC.

(Є. Діомідов, Київ)

456. У країні є 2014 аеропортів, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Два аеропорти сполучено прямим рейсом тоді й лише тоді, коли пряма, яка проходить через них, ділить країну на дві частини з 1006 аеропортами у кожній з них. Довести, що не існує двох аеропортів, для яких можна здійснити подорож з першого у другий, відвідавши кожен з 2014 аеропортів рівно по одному разу.

(Baltic Way)

457. Знайти всі натуральні n такі, що $[\log_2 n] = [\log_3 n]$ (тут $[x]$ позначає цілу частину числа x).

(В. Ясінський, Вінниця)

458. Знайти всі пари цілих чисел (x, y) таких, що $y^3 - 1 = x^4 + x^2$.

(Baltic Way)

459. Чотирикутник $ABCD$ вписано у коло з діаметром BD. На меншій з дуг AD обрали довільну точку M. З точки M провели перпендикуляри MN, MK, MP, MT на AB, BC, CD, AD відповідно. Довести, що $S_{\triangle MNP} = S_{\triangle MKT}$.

(І. Нагель, Євпаторія)

454. For every $a, b, c > 0$ prove the inequality

$$\frac{a}{b+c}\left(a^2+bc\right)+\frac{b}{c+a}\left(b^2+ca\right)+\frac{c}{a+b}\left(c^2+ab\right) \geq a^2+b^2+c^2.$$

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

455. Points D and E lie in the interior of an angle A. Construct points B and C on sides of the angle such that D lies on the segment BC and E lies on a circumcircle of triangle ABC.

(Ye. Diomidov, Kyiv)

456. In a country there are 2014 airports, no three of them lying on a line. Two airports are connected by a direct flight if and only if the line passing through them divides the country in two parts, each with 1006 airports in it. Show that there are no two airports such that one can travel from the first to the second, visiting each of the 2014 airports exactly once.

(Baltic Way)

457. Determine all positive integers n such that $[\log_2 n] = [\log_3 n]$ (here $[x]$ denotes the integer part of x).

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

458. Find all pairs (x, y) of integers such that $y^3 - 1 = x^4 + x^2$.

(Baltic Way)

459. Let $ABCD$ be a quadrilateral inscribed in a circle of diameter BD and M be an arbitrary point on the shorter arc AD. Let MN, MK, MP, MT be perpendiculars from M onto lines AB, BC, CD, AD respectively. Prove that $S_{\triangle MNP} = S_{\triangle MKT}$.

(I. Nagel, Evpatoria)