

Задачі 448 — 453

Розділ ведуть Володимир Браїман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

448. Нехай AL — бісектриса трикутника ABC , у якому $AB > AC$. На стороні AB відмітили точку K таку, що $AK = AC$. Нехай N — точка перетину кіл, описаних навколо трикутників ABC та CKL . Довести, що точки A, L, N лежать на одній прямій.

(О. Тарасюк, Київ)

449. Знайти всі пари (a, b) натуральних чисел, для яких $\text{НСД}(a, b) = 1$ та $\frac{a}{b} = \overline{b, a}$. (Наприклад, якщо $a = 92$ та $b = 13$, то $\frac{92}{13} \neq \overline{13, 92}$.)

(Іран)

450. На стороні AC трикутника ABC взяли довільну точку E . На променях AB і CB відмітили точки N і M відповідно так, що $\angle AEN = \angle ABC = \angle CEM$. Промені AM і CN перетинаються в точці K . Довести, що прямі KE , які відповідають всім можливим положенням точки E , проходять через спільну точку.

(В. Ясінський, Вінниця та І. Нагель, Євпаторія)

451. Розв'язати рівняння

$$2^{\sin^4 x - \cos^2 x} - 2^{\cos^4 x - \sin^2 x} = \cos 2x.$$

(Румунія)

452. Нехай AD — діаметр кола, описаного навколо трикутника ABC , H — ортоцентр цього трикутника, E — середина AH . Побудувати трикутник ABC , якщо відомі точки D, E та пряма l , яка містить BC .

(С. Яковлев, Київ)

453. Нехай x та y — дійсні числа, які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} x^4 + 2y^3 - x = -\frac{1}{4} + 3\sqrt{3}, \\ y^4 + 2x^3 - y = -\frac{1}{4} - 3\sqrt{3}. \end{cases}$$

Довести, що $2xy = x + y$.

(В. Ясінський, Вінниця)

448. Let AL be an angle bisector of triangle ABC such that $AB > AC$. Point K on the side AB is such that $AK = AC$. Let N be the intersection point of circumcircles of triangles ABC and CKL . Prove that points A, L, N are collinear.

(*O. Tarasyuk, Kyiv*)

449. Find all pairs (a, b) of positive integers for which $\gcd(a, b) = 1$, and $\frac{a}{b} = \overline{b.a}$.
(For example, if $a = 92$ and $b = 13$, then $\frac{92}{13} \neq 13.92$.)

(*Iran*)

450. Let E be an arbitrary point on the side AC of triangle ABC . Points N and M are chosen on the rays AB and CB respectively such that $\angle AEN = \angle ABC = \angle CEM$. Rays AM and CN intersect at point K . Prove that when point E varies, line KE passes through a fixed point.

(*V. Yasinsky, Vinnytsya and I. Nagel, Evpatoria*)

451. Solve the equation

$$2^{\sin^4 x - \cos^2 x} - 2^{\cos^4 x - \sin^2 x} = \cos 2x.$$

(*Romania*)

452. In the triangle ABC let AD be the diameter of a circumcircle, H be the orthocenter and E be the midpoint of AH . Construct triangle ABC if points D, E and line l which contains BC are given.

(*S. Yakovlev, Kyiv*)

453. Let x and y be real numbers which satisfy the system of equations

$$\begin{cases} x^4 + 2y^3 - x = -\frac{1}{4} + 3\sqrt{3}, \\ y^4 + 2x^3 - y = -\frac{1}{4} - 3\sqrt{3}. \end{cases}$$

Prove that $2xy = x + y$.

(*V. Yasinsky, Vinnytsya*)