Задачі 442 —447

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

442. Розв'язати рівняння $[x^2] - 3[x] + 2 = 0$ ($[x]$ позначає цілу частину числа x).

(О. Кукуш, Київ)

443. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що $f(x+y)+y \leq f(f(f(x)))$ при всіх $x, y \in \mathbb{R}$.

(Бенілюкс)

444. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 — висоти гострокутного трикутника ABC. З точок A, B та C опущено перпендикуляри AK, BL та CM на прямі A_1B_1, B_1C_1 та C_1A_1 відповідно. Довести, що $A_1K = B_1L = C_1M$.

(М. Рожкова, Київ)

445. Нехай k, m та n — три попарно різні натуральні числа. Довести, що

$$\left(k - \frac{1}{k}\right)\left(m - \frac{1}{m}\right)\left(n - \frac{1}{n}\right) \leq kmn - (k + m + n).$$

(Польща)

446. Всередині трикутника ABC відмітили довільну точку M, а на відрізку AM відмітили довільну точку N. Прямі AB і AC вдруге перетинають описане коло трикутника BMC в точках E і F відповідно. Пряма EM вдруге перетинає описане коло трикутника NMC у точці P, а пряма FM вдруге перетинає описане коло трикутника NMB у точці Q. Доведіть, що описані кола трикутників EMF і PMQ дотикаються одне одного.

(В. Ясінський, Вінниця)

447. Чи існують такі чотири різні цілі числа, що сума довільних двох з них є квадратом натурального числа?

(О. Руденко, Київ)

442. Solve the equation $[x^2]-3[x]+2=0$ (here $[x]$ denotes the integer part of x.)

(O. Kukush, Kyiv)

443. Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that $f(x+y)+y\le f(f(f(x)))$ holds for all $x,y\in\mathbb{R}$.

(Benelux)

444. Let AA_1, BB_1, CC_1 be the altitudes of acute triangle ABC. Let AK, BL and CM be the perpendiculars drawn from points A,B and C to the straight lines A_1B_1, B_1C_1 and C_1A_1 respectively. Prove that $A_1K=B_1L=C_1M$.

(M. Rozhkova, Kyiv)

445. Let k,m and n be three different positive integers. Prove that

$$\left(k-\frac{1}{k}\right)\left(m-\frac{1}{m}\right)\left(n-\frac{1}{n}\right)\le kmn-(k+m+n).$$

(Poland)

446. Let M be arbitrary point inside triangle ABC and N be arbitrary point of the segment AM. Straight lines AB and AC intersect the circumcircle of triangle BMC for the second time at points E and F respectively. Straight line EM intersects the circumcircle of triangle NMC for the second time at point P, while straight line FM intersects the circumcircle of triangle NMB for the second time at point Q. Prove that the circumcircles of triangles EMF and PMQ touch each other.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

447. Do there exist four distinct integers such that the sum of any two of them is a perfect square?

(O. Rudenko, Kyiv)