Задачі 436 —441

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

436. Нехай вписане коло трикутника ABC має центр I та радіус r. Коло ω з центром I та радіусом $2r$ перетинає сторони AB та AC у точках D та E відповідно, причому DE — діаметр кола ω. Знайти $\angle BAC$.

(М. Рожкова, Київ)

437. Нехай a, b, c — довжини сторін трикутника з площею S. Довести, що

$$\big((a+b)(b+c)(a+c)-a^3-b^3-c^3-2abc\big)^{3/2}(a+b+c)^{1/2} \geq 12\sqrt{3}Sabc.$$

(І. Фещенко, Київ)

438. Нехай n — натуральне число. Числа $1, 2, 3, \dots, 2n$ записані у довільному порядку в $2n$ різних точках на колі. На кожній хорді, яка з'єднує дві з цих точок, записано модуль різниці чисел, записаних в її кінцях. Довести, що існують n хорд, жодні дві з яких не перетинаються, для яких сума записаних на них чисел дорівнює n^2.

(Філіппіни)

439. Дано трикутник ABC, в якому $AB > AC$. Через точку A провели дотичну до описаного кола трикутника ABC, яка перетинає пряму BC в точці P. На продовженні сторони BA за точку A відмітили точку Q так, що $AQ = AC$. Нехай X та Y — середини відрізків CQ і AP відповідно, а R належить відрізку AP, причому $AR = CP$. Довести, що $CR = 2XY$.

(В. Ясінський, Вінниця)

440. Знайти всі функції $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ такі, що рівність

$$f(m) + f(n) = f(mn) + f(m + n + mn)$$

має місце при всіх $m, n \in \mathbb{Z}$.

(Японія)

441. У площині опуклого чотирикутника $ABCD$ розташована точка P. Нехай A_0, B_0, C_0 і D_0 — середини сторін AB, BC, CD і DA відповідно. На стороні AB обирають точку A_1 так, що промені PA_0 і PA_1 симетричні відносно бісектриси кута APB. Аналогічним чином обирають точки B_1, C_1 і D_1 на сторонах BC, CD і DA відповідно. Знайти всі такі точки P, для яких чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ є паралелограмом.

(В. Ясінський, Вінниця)

436. Let I be incenter and r be inradius of triangle ABC. Circle ω with center I and radius $2r$ intersects sides AB and AC at points D and E respectively. Moreover DE is a diameter of ω. Find $\angle BAC$.

(M. Rozhkova, Kyiv)

437. Let a, b, c be side lengths of triangle with area S. Prove that

$$\big((a+b)(b+c)(a+c) - a^3 - b^3 - c^3 - 2abc\big)^{3/2}(a+b+c)^{1/2} \geq 12\sqrt{3}Sabc.$$

(I. Feschenko, Kyiv)

438. Let n be a positive integer. The numbers $1, 2, 3, \ldots, 2n$ are randomly assigned to $2n$ distinct points on a circle. To each chord joining two of these points, a value is assigned equal to the absolute value of the difference between the assigned numbers at its endpoints. Show that one can choose n pairwise non-intersecting chords such that the sum of the values assigned to them is n^2.

(Philippines)

439. A triangle ABC is given with $AB > AC$. A tangent to the circumcircle of triangle ABC at point A intersects the line BC at point P. Point Q is chosen at the extension of BA beyond A such that $AQ = AC$. Let X and Y be the midpoints of segments CQ and AP respectively, R is chosen at the segment AP such that $AR = CP$. Prove that $CR = 2XY$.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

440. Find all functions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ such that the equality

$$f(m) + f(n) = f(mn) + f(m + n + mn)$$

holds for all $m, n \in \mathbb{Z}$.

(Japan)

441. A point P is located in the plane of convex quadrangle $ABCD$. Let A_0, B_0, C_0 and D_0 be midpoints of AB, BC, CD and DA respectively. A point A_1 is chosen at side AB such that rays PA_0 and PA_1 are symmetric with respect to the angle bisector of $\angle APB$. Points B_1, C_1 and D_1 are chosen in a similar way at sides BC, CD and DA respectively. Find all points P for which quadrangle $A_1B_1C_1D_1$ is a parallelogram.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)