143. В трикутнику $\triangle ABC$ проведено бісектриси AA_1, BB_1, CC_1 і вписано коло, що дотикається до сторін трикутника в точках A_2, B_2, C_2. Доведіть, що площа трикутника $\triangle A_2B_2C_2$ не перевищує площу трикутника $\triangle A_1B_1C_1$.

(Р. Ушаков, м. Київ)

144. Дано n-кутник $A_1A_2\dots A_n$ у якого $A_iA_{i+1} \parallel A_{i-2}A_{i+2}$ та $A_{i-1}A_{i+1} \parallel A_{i-2}A_{i+2}$ для всіх $i, 1 \le i \le n$ (з домовленістю, що $A_{n+1} = A_1, A_{n+2} = A_2, A_0 = A_n, A_{-1} = A_{n-1}$). Довести, що цей многокутник можна паралельним проектуванням перевести у правильний.

(О. Хоменко, І. Трибушний, м. Київ)

145. Знайдіть всі функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ такі, що для будь-яких $x, y \in \mathbb{N}$ виконується

$$f(x + |f(y)|) = x + f(y).$$

(А. Примак, м. Київ)

146. Знайдіть довжину найменшого ребра тетраедра максимального об'єму серед тетраедрів, у яких сума довжин деяких чотирьох ребер рівна одиниці.

(В. Ясінскький, м. Вінниця)

147. Довести, що для довільного натурального числа n існує натуральне число m і набір S, що складається більше ніж з m підмножин множини $\{1, 2, \dots, m\}$ такі, що об'єднання довільних n елементів набору S не дорівнює об'єднанню всіх елементів набору S.

(А. Примак, А. Бондаренко, м. Київ)

148. Функцію $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ задано умовами:

(a) $f(x) = x$ для всіх ірраціональних $x > 1$;

(b) якщо $x = \frac{p}{q}$, де p, q — взаємно прості натуральні числа, то $f(x) = \frac{p}{q+1}$.

Знайти найменше значення функції f на інтервалі $(\frac{1000}{999}, \frac{999}{998})$.

(В. Ясінскький, м. Вінниця)

143. Let AA_1, BB_1, CC_1 be the bisectors in the triangle $\triangle ABC$ and let A_2, B_2, C_2 be the tangency points of the incircle to the sides of the triangle. Prove that the area of the triangle $\triangle A_2B_2C_2$ is not greater than the area of the triangle $\triangle A_1B_1C_1$.

(R. Ushakov, Kyiv)

144. An polygon $A_1A_2\dots A_n$ is such that $A_iA_{i+1} \parallel A_{i-2}A_{i+2}$ and $A_{i-1}A_{i+1} \parallel A_{i-2}A_{i+2}$ for all $i, 1 \le i \le n$ (here $A_{n+1} = A_1, A_{n+2} = A_2, A_0 = A_n, A_{-1} = A_{n-1}$). Prove that this polygon can be transformed by a parallel projection into a regular one.

(O. Khomenko, I. Trybushnyj, Kyiv)

145. Find all functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ such that for all $x, y \in \mathbb{N}$ holds

$$f(x + |f(y)|) = x + f(y).$$

(A. Prymak, Kyiv)

146. Find the length of the minimal edge of the tetrahedron of the maximal possible volume among the tetrahedrons with the sum of length of four edges equal to one.

(V. Yasinsky, Vinnytsia)

147. Prove that for every positive integer n there exists a positive integer m and a set S, consisting of more than m subsets of the set $\{1, 2, \dots, m\}$, such that union of any n elements of the set S does not equal to the union of all the elements of the set S.

(A. Prymak, A. Bondarenko, Kyiv)

148. A function $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ is defined by the conditions

(a) $f(x) = x$ for all irrational $x > 1$;

(b) if $x = \frac{p}{q}$, for coprime positive integers p, q, then $f(x) = \frac{p}{q+1}$.

Find the minimal value of the function f on the interval $(\frac{1000}{999}, \frac{999}{998})$.

(V. Yasinsky, Vinnytsia)